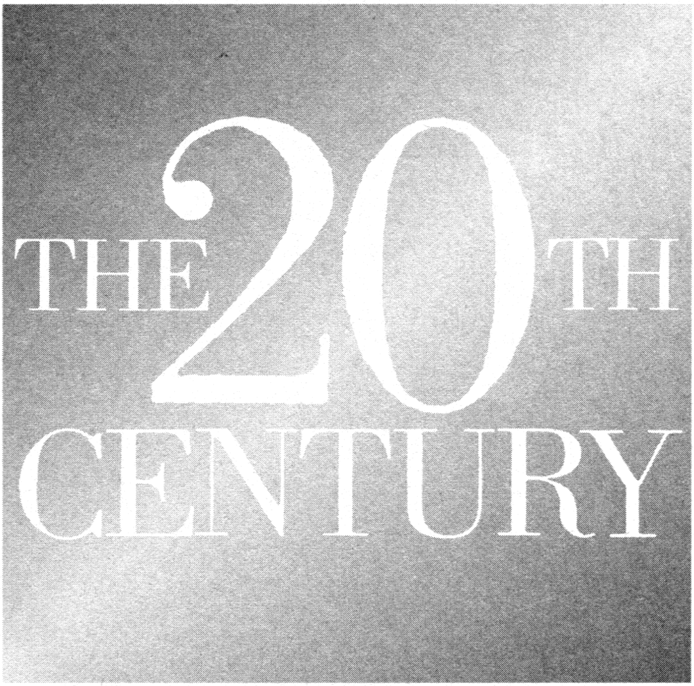
20世紀の数学

笠原乾吉・杉浦光夫 編



日本評論社

まえがき

20 世紀の終りも近い．本書は，この機会に 20 世紀数学を振返って見ようとする試みである．勿論世紀というのは，人為的な約束に過ぎないが，時には 100 年単位で数学を考えることも意義があると考えたのである．

20 世紀の数学は，19 世紀数学を受け継いで発展して来たのであるが，この 100 年の間に自ら過去の数学と異なる独自の特色を備えるに至った．このような 20 世紀の数学の種々の相を，数学各分野の専門家の方方に自由な立場で語って頂いたのが本書である．

本書各章の内容は，序章を除き，1995 年 11 月 9 日—12 日の 4 日間，津田塾大学で開催された「20 世紀数学シンポジウム」で発表された．その時の講演原稿に加筆して頂いて本書ができたのである．

本書では，あまり内容が専門的技術的になることを避けて，数学科の学部学生に理解できるように執筆して下さるようにお願いした．各執筆者は，大変お忙がしい中を，私どもの要請に応えて力作をお寄せ下さった．おかげで 20 世紀数学の興味ある発展の種々の面を解説したユニークな本ができ上った．数学に関心ある広い範囲の方方に読んで頂ければ幸いである．

本書の基礎となった「20 世紀数学シンポジウム」の開催については，文部省科学研究費一般 C(課題番号 07640330) の支給を受け，また津田塾大学からは，特別研究費を頂いた．これらによって，シンポジウム開催が実現したのである．ここに記して感謝の意を表する．

またシンポジウム運営の実務については，伊藤俊次教授と大学院生の古門麻貴，江居宏美の両氏および数学科事務室の中川美恵子氏に大変お世話になった．これらの方方に厚く御礼申し上げる．

杉浦光夫・笠原乾吉

1998 年 1 月

目次

序章

20世紀の数学

杉浦光夫

本書では，20 世紀数学の種々の分野や問題について，詳しい解説がされている．これに対しこの序章は，20 世紀数学をその周囲の状況と共に鳥瞰しようとしたものである．筆者の力不足で，散漫な印象記に終っているが，20 世紀数学を考える場合の手掛りとなればと願っている．本書に収めた，山口昌哉「戦後 50 年の数学は何をもたらし，未来に何を期待されるか」は，20 世紀数学とその特色の変化を考えた論文である．この論文をこの序章と合わせ読んで頂ければ幸いである．この序章を書くに際して多くの文献のお世話になった．本文中に文献を記した所もあるが，書き切れなかったので，文献は一括して章末に掲げた．これらの文献の著者に厚く御礼を申し上げる．

1.　19世紀までの数学

古代の諸文明は，それぞれの数学を持っていた．例えばメソポタミアでは 60 進法の小数が用いられていた．それはヘレニズム時代の天文学を経て現代に伝わった．時間や角度の 60 進法はその遺産である．

どの文明の数学にも，数の計算法は含まれているが，証明という考えが生れたのは古代ギリシアの数学だけであった．前 5 世紀のピュタゴラスの教団，前 4 世紀のプラトンのアカデメイアを経て，前 3 世紀になると，エウクレイデス (ユークリッド) の『原論』が出現し，このようなギリシア数学の特色が，体系的な書物としてまとめられた．やや遅れてアルキメデスの『放物線の求積』やアポロニウスの『円錐曲線』等が現われ，この頃ギリシア数学の生産力は頂点に達した．

ギリシア数学の伝統は，紀元後 5 ～ 6 世紀まで続くが (東ローマではもっと後までその伝統が続く)，やがてそれはアラビアに受継がれる．そしてアラビア自身も代数学や三角法において独自の貢献をした．12 世紀以後になると，このアラビア経由で古代ギリシアの学問が永らく後進地域であったヨーロッパに伝わり，ルネッサンスにつながって行く．

ルネッサンスのヨーロッパでは，実用的な数学と学者の理論的な研究が並立していた．16 世紀になるとイタリアで虚数が発見され，それを用いて 3 次，4 次の代数方程式の解法が，考案された．この二つは 300 年経った 19 世紀においてガウス，アーベル，ガロア，リーマン，ワイヤストラス等により，代数学の基本定理，代数方程式のガロア理論，虚数乗法論，複素解析等の大輪の花を咲かせたのであった．

少し話が飛んだが，17 世紀にはヴィエト，デカルトの記号代数，デカルト，フェルマーの座標幾何等によって数学の表現能力が飛躍的に増大し，変数，函数の概念が成長して，その基礎の上に微積分法が生れた．こうして古代，中世の数学と一線を画す近代数学が誕生したのであった．微積分法の発見者の一人であるニュートンは，一方で力学の体系を作った．従来の数学の対象であった数や図形の外に，数学特に解析学は力学の中に豊富な問題を見出した．18 世紀の数学の大きな部分は，この方面の研究であった．オイラー，ラグランジュ等がその代表者である (勿論彼等はオールラウンドの数学者で，例えば数論でも重要な仕事を残している)．

19 世紀になると，物理学は熱や電磁気などの新しい対象を問題とするようになり，これに応じて数学にもフーリエ解析，ポテンシャル論などが生れ，偏微分方程式の境界値問題，初期値問題が重要な課題として研究されるようになった．

19 世紀数学の重要な特徴の一つは，数学の中から新しい数学が生れたことである．例えば古代から問題になっていた平行線の公理は他の公理から証明可能かという問題は，長い歴史の後に非ユークリッド幾何学を生み出した．また交わらない二直線として特徴付けられる平行線は，実は無限遠点で交わっているという視点から，射影幾何学が生れた．またフェルマー，オイラー，ラグランジュ等によって研究されて来た整数論は，ガウスの手によって合同式の理論，平方剰余相互法則，整係数 2 元 2 次形式の理論，円分方程式の理論として体系的に展開された．

以上述べたことは，19 世紀までのヨーロッパ数学の流れである．しかし 19 世紀中頃までは，これとは異なる数学の伝統が生きていた．それは，中国，韓国，日本等の中国文化圏の国国においてであった．日本では古代に中国数学を輸入したが，江戸時代になると，中国数学から出発して独自の研究を行うようになった．これが和算と呼ばれるものである．

しかしヨーロッパ諸国に追付くことを目標にしていた明治政府は，明治 5 年 (1872 年) 公布の学制において，算術は洋法を用いることを明記した．こうして日本の教育は洋算に切替えられ，ただ実用上から有効な珠算が電卓の出現まで生残ったに過ぎなかった．

日本と同じく鎖国を続けていた韓国も開国せざるを得なくなった．そして，始めはミッション系の学校でヨーロッパ式の数学・科学が教授されていたが，「1895 年 (高宗 32 年) から実施され始めた新制学校教育において，算術 (または数学) は，その内容がまったくヨーロッパ・スタイルとして改編されるという点で旧来の算学と

は訣別している」(金容雲・金容局共著『韓国数学史』, [19]).

中国では，清朝末期の変法運動によって，ヨーロッパの学術・制度をとり入れることが提唱され,「各地に新式学校が建てられ，西洋科学が教授された．1903 年には，“奏定学堂章程” が頒布されたものの，いまだ広汎には施行されていない．(中略) かくして小学堂から大学堂まで，あらゆる数学課程が一律に西洋で行われ教材を採用し，全面的西洋化の道をまっしぐらに走っていく.」(銭宝琮編,『中国数学史』[24]).

こうして，19 世紀の終りまでに世界中の数学は唯一つのヨーロッパ数学に統一されたのである．20 世紀数学について述べる前提として，このことを承知して置いて頂きたい．

2.　数学者数の増加と広がり

先ず外面的な状勢から見て行こう．20 世紀において数学の研究は，大きな発展を遂げたが，それは決して地域的に一様ではなかった．

19 世紀における最も主要な研究は，ドイツとフランスでなされたものが多い．この二国は 20 世紀でも数学の研究で重要な役割を果したが，さらに多くの数学者が活躍する研究の盛んな国としてアメリカとロシアが出現したことは，20 世紀数学の大きな特徴である．この外イギリス，ハンガリー，ポーランド，イタリア，フィンランド，スウェーデン等ヨーロッパの諸国や日本，中国などからも重要な数学者が現われた．また南アメリカやオセアニア等でも数学の研究が行われるようになった．20 世紀後半になると植民地だったアジア・アフリカの諸国も独立して科学研究も始まった．

18 世紀における蒸気機関の発明は，少数の機械技術者の工夫から生れたが，科学，技術の有用性が広く認識された 20 世紀においては，科学技術の研究が大学，研究所，企業等において組織的に行われ，その要員として科学技術者が多数養成されるようになった．その一環として，科学を表現する重要な言語として数学の教育が必要とされるようになった．こうして 20 世紀中に数学者の数は急増した．国際数学連合 (IMU) が発行した 1994 年版の世界数学者名簿 (World directory of mathematicians) には，おおよそ 4 万 2 千人の数学者の名前が記載されている．

国別に見て見よう．1888 年 12 月に設立されたニューヨーク数学会は，一年後にも 16 名の会員しかいなかった．1894 年にこの会はアメリカ数学会 (AMS) と改称され，会員は 251 人となった．そして 50 年後の 1937 年末の会員数は 2127 人であった．1992/93 年の会員名簿では，AMS の会員数は，2 万 7333 人となっている．これは多数の外国人会員を含む．またアメリカには，産業・応用数学会 (SIAM) があり，92/93 年度の会員数は 7915 人である．

日本では，1878 年 5 月に，日本数学会の前身である東京数学会社が創設されたが，設立時の会員は 117 人であった．東京数学会社は，1884 年に東京数学物理学会となりさらに 1919 年日本数学物理学会と改称されたが，1918 年の会員数は 439 名であった．1946 年に，日本数学物理学会が解散し，日本数学会が作られたとき，その会員数は 751 人であった．1995 年には日本数学会の正会員数は 5070 人となっている．

これらの学会は，創設時には，国内の数学者をすべて会員にしていたわけではないので，その点を考慮する必要があるが，この 100 年間特にその後半において著しく数学者数が増えたことは見てとれる．

ドイツ数学会 (数学者協会と言うべきか)(DMV) は，1890 年に設立された．1902 年の会員名簿では，会員総数は 583 人であった．国別では次のようになっている．

ドイツ 368，オーストリア・ハンガリー 63，スイス 25，ロシア (ポーランド，フィンランドを含む) 15，イタリア 12，オランダ 9，イギリス 9，フランス 6，その他のヨーロッパ諸国 22，北アメリカ 50，アジア 4．斎藤恭司氏が調べて下さった所によると，現在の DMV の会員数は，3024 人だとのことである．

3.　20 世紀社会と数学

関孝和は，甲府宰相綱豊に仕え，勘定吟味役となった．綱豊が五代将軍綱吉の世子となったので，直参となり御納戸組頭となり，三年後非役 (小普請役) となった．関の数学研究は，彼の職務とは無関係で個人の趣味または芸としてなされたのである．幕府は数学研究を奨励したことは全くないと思われる．

これに対し，20 世紀においては，数学の有用性は広く認められ，初等教育においてその教育が義務付けられると共に，工業諸国では数学研究のための研究所や大学が公費で設けられ，研究費が支給されている．日本では 1939 年から科学研究費の予算が計上されるようになった．現在では科研費によって専門別の多くのシンポジウムが行われるようになっている．一方数理解析研究所が京都大学に 1963 年に付置された．それ以後数理研の所員であった佐藤幹夫およびその学派の人人やその他の所員による重要な研究が行われた．また数理研は，共同利用研究所として全国の研究者にとって役立っている．

アメリカでは，既に 1933 年にプリンストン高等研究所が，私人の寄附を基にして開設され，数学の研究に大きな実績を残していた．また第二次大戦中の研究者の動員が有効であったことから軍がその資金の一部を科学者の研究費として支給し，その対象には純粋数学も含まれていた．そして 1950 年には，全米科学財団 (NSF) が設立され，連邦政府の予算で研究費が支給されることになった．それ以前からアメリカにはロックフェラー，フォード，グッゲンハイム等の財団があり科学研究を

援助していた.

また有力な企業は，研究所を設けて研究を行った．例えばATTのベル電話研究所では，電子の波動性の証明，宇宙の 3° K 放射の発見，トランジスタの発明などの重要な基礎研究が行われた．このような企業の研究所で，数学の研究が行われることは殆んどなかったが，電子計算機の出現以後は計算機の基礎理論や計算機を用いる応用数学の研究などが，企業研究所でも行われるようになった.

さて，公費によって数学をはじめ諸科学の研究が支持されるようになったことは有難いことであったが，それはまた研究者にとって自分達の研究の内容やその意義を一般市民に了解してもらうことが重要になったことを意味する．この点については，物理学，天文学や生物学に比較して数学には特別の困難が存在する．現代数学の内容が高度に抽象的なものになっているからである．これに対しては，いきなり現代数学の理解を求めることは難しいので，長い数学の歴史の中から適当な題材を選んで数学そのものの理解を深めることが先決であろう．その上で現代数学についても解説を試みることになるが，それは研究者の片手間では無理であり，良質のサイエンス・ライターで数学を専門にする書き手の出現が望まれる．このようなライターと専門家の協力によって，一般市民で関心を持つ人人に対して現代数学と数学研究者についての報道がなされることを期待したい.

日本では，特に初等教育の画一性と入試競走によって数学が入試のために学ばれるという本末顛倒が広く見られる．この点の改革がなされないと数学の真の理解を多くの市民に求めることは難しい.

企業の研究は収益性を考慮するので，大学等とは異った面が生ずる．この点について十分な議論をする余裕がないが，最近話題となった数学の定理を特許の対象とする問題を取上げて見よう．数学は特許の対象にならないというのが長い間の慣習であったが，知的所有権の主張が強くなった 1970 年代以後，数学の定理で特許を得たものが現われた．その代表的なものが，線型計画法のある解法に対して，ベル電話研究所が取得した特許で，発見者の名前をとってカーマーカー特許と呼ばれているものである．特許取得後ベル研究所はそのソフトを売出したが，それが 890 万ドルという高額なので人人を驚かした．結局このソフトは米空軍とある航空会社の二個所に売れたが，数年後にはほぼ同じ性能のソフトが数万ドルで売出されて，それ以上売れる見込みはなくなった (今野 [20] 参照)．工業技術は特許制度と共に発展したが，数学が特許制度とどうかかわって行くかはこれからの問題である.

上に述べたように 20 世紀においては科学の有用性が社会で認められ体制の一部となった．しかしそのことは，科学または科学者と社会や政治の間が常にうまくいっていたということではない.

政治が学問内容に立入った例としては，ソヴィエト共産党と政府がルイセンコ学説を正しいとして支持し，反対派の生物学者を弾圧したのが著しい．これはソヴィ

エトの生物学特に遺伝学に大きな打撃を与えた事件であった．

また学問内容とは直接関係はないが，ナチスは政権をとると直ちに大学や公立の研究所からユダヤ系の人人を追放した．数学では特に有力なユダヤ系研究者が多かったので大きな損害を受けた．例えばゲッティンゲン大学では数学の正教授五人の内，フェリックス・ベルンシュタイン，ランダウ，クーラントの三人と員外教授のエミー・ネーターは解職され，ワイルはユダヤ人ではなかったが夫人がユダヤ人であり，反ユダヤ主義に反対して，辞職した．私講師，助手のユダヤ系の人人も解職され，世界における数学研究の中心の一つであったゲッティンゲンの数学教室は1933年に壊滅した．このナチスのユダヤ人教授の追放は数学界に大きな影響を及ぼした．ドイツのユダヤ系数学者の多くは，アメリカに亡命しアメリカが今世紀後半において最も数学研究の盛んな国となることに貢献した．またドイツは数学の研究において大きな打撃を受けた．その影響は現在にまで及んでいる．

また中国の文化大革命では肉体労働と頭脳労働の差別を廃止するということで研究者を農村等で労働させたため多くの学問分野で数年間は殆んど研究活動が停止してしまった．

これ等の例を見るとき，20世紀の科学者でも困難な経験をした人人が少くないことがわかる．さらにナチスによって殺された人人の中には．シャウダーやブルメンタール等何人かの数学者も含まれ，またハウスドルフは強制収容所に入れられることがきまったとき，夫人と共に自殺したことは忘れられない．一方ナチス党員であったゲンツェンがプラーハの収容所で敗戦後餓死したことも付け加えておこう．これらは20世紀数学の歴史の一面である．

4.　物理学と数学

数学は自然科学や経済学において広く用いられているが，特に数学に対し大きな影響を与えた物理学と数学の交渉をここで取上げよう．

4.1　相対性理論

20世紀の物理学は，相対性理論と量子力学という二つの新しい理論によって19世紀までの古典物理学とははっきり異なるものとなった．

1905年アインシュタインは,「運動物体の電気力学」という論文で特殊相対性理論を提出した．その中に現われる二つの慣性系の間の時間，空間の変換式(ローレンツ変換)は前年の論文でローレンツが得たものと全く同じであったが，アインシュタインの決定的に新しい点は，ニュートンの絶対時間，絶対空間の概念がもはや成立たないことを的確に認識した点にある．しかしこの点は当時必らずしも多くの人達によっては認められなかった．

1907 年数学者ミンコウスキーは，この点をはっきり認識し，時間と空間はもはや独立に存在するのではなく，4 次元の時空の内に合一して考えられるべきものとし，時空の二点 $(x, y, z, t)\,(x', y', z', t')$ の間隔は，ミンコウスキー計量

$$c^2(t-t')^2-(x-x')^2-(y-y')^2-(z-z')^2$$

で測られるべきものであるとした．そしてローレンツ変換はこの 2 次形式を不変にする 1 次変換として特徴付けられたのである．

同じ頃アインシュタインは，慣性系同志の変換でなく，非慣性系の間の変換を考え始めた．回転する座標系上では遠心力やコリオリの力のような慣性力が生ずる．一方エートヴェシュが振り秤による実験で精密に検証したように

$$慣性質量 = 重力質量$$

という等式が高い精度で成立つ．そこでこの等式を原理として認めたアインシュタインにとっては，一般相対論は重力場の理論に外ならなかった．アインシュタインは当初一般の二つの座標系の間の変換を扱い，そこから不変な意味を持つ結論を引出す数学形式を模索していたが，数学者の友人グロスマンから，そのような数学は既にリッチ・クルバストロとレヴィ・チヴィタの二人によって絶対微分学 (リッチ算法) として提出されていることを教えられ，共同研究によって絶対微分学を用いた重力場の研究を開始した．そこでは時空は 4 次元多様体でそこに与えられた計量

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

の係数 g_{ij} が重力場のポテンシャルを表わすと考える．ただしこの 2 次形式は，リーマン幾何のように正定値ではなく，符号定数 $(1,3)$ の不定符号 2 次形式であるが，リッチ算法の多くの公式はこの場合にも通用する．そしてアインシュタイン達は，マックスウェル方程式を一般共変性を持つ形に表わすことにも成功した．

さらに 1914 年には，アインシュタインはこの多様体の測地線の方程式として重力場における質点の運動方程式を得ることが出来た．しかし質量の分布を与えて，重力場を決定する方程式 (古典力学のニュートン・ポテンシャルに対するポアッソンの方程式に対応するもの) はまだ得られていなかった．アインシュタインはこの場の方程式を 1915 年に発見し，一般相対性理論を完成させた．彼は一般相対論の帰結として，

1. 水星の近日点移動

2. 重力場での光の屈折

3. 重力場での光スペクトルの赤方偏移

の三つを挙げた．1 はアインシュタイン自身によって前から知られていたこの現象が一般相対論を用いて説明でき，理論値が観測値と一致することを示した．2 はエディントン等により 1919 年の日食で検証された．3 はアダムズが白色倭星 (シリウスの伴星) のスペクトルで検証した．

今世紀後半になると天文学の大発展による新しい現象の発見 (例えば連星パルサー) や観測技術の進歩 (例えばメスバウアー効果の利用) によって，一般相対論の正しさは非常に高い精度で観測によって確められた．一方一般相対論の種々の変形版は実験に合わないことがわかった．

一般相対論では，重力場は計量として時空に組み込まれているが，電磁場はこの時空に後からマックスウェル方程式を与えることによって指定されることになる．この二つの場の取扱いの非対称性に不満を覚えたワイルは，電磁場と重力場が共に時空の幾何構造として組み込まれている統一場理論を構成しようと試みた．ワイルは,「ゲージ不変の原理」を基本原理として理論を展開したので物理学者はゲージ理論という名でこの種の理論を呼ぶ．リーマン幾何では計量テンソルの共変微分は 0 であるが，ワイルはそれが計量テンソルに比例すると仮定した：$g_{ij;k} = 2g_{ij}\varphi_k$. そしてその比例定数 φ_k が電磁ポテンシャルを表わすとした．このワイルの統一場理論は，いくつかの具合の悪い点が発見され物理理論としては成功しなかった．例えばワイルの理論では重力場の方程式は 4 階の方程式となってしまう．しかしワイルはこの理論の数学的側面として接続の理論を展開し射影接続，共形接続などの概念も導入し，接続概念の重要さを幾何学者に教えた．E. カルタンはこれを受けて「一般化された空間」の名で，一般の接続を論じた．後にファイバー・バンドルの概念によって，接続は明快に定義されることになり，微分幾何学の基本概念の一つとなった．

ワイルは後に量子力学では絶対値 1 の因子を波動函数に掛けても物理法則は不変という点に注目して，重力場と離れた新しい「ゲージ不変の原理」を提唱した．物理学では，今世紀後半の素粒子論でこの種のゲージ理論の有効性が認識されるようになった．特に電磁場と弱い相互作用の統一場理論 (ワインバーグ・サラム理論) がゲージ理論によって作られた．また物理学者ウィッテンは 3 次元多様体 M 上のゲージ理論と M 内の結び目に対するジョーンズ多項式の関係を明らかにした (1990 年).

以上のような簡単な歴史からも数学と物理学の相互作用が双方の発展に役立っていることが見られる．

4.2　量子力学

1900 年のプランクの作用量子の発見から，1/4 世紀の間に量子論は多くの実験結果と理論的知見を蓄積した．中でも 1913 年のボーアの原子構造論は，水素原子のスペクトル系列を説明し，周期律表の根拠を与えた．しかし多くの現象を一貫した理論体系から導くことは 1925/26 年における量子力学の出現によって始めて可能となった．

よく知られているように，当初量子力学はハイゼンベルク，ボルン，ヨルダン，パウリ等による行列力学とシュレーディンガーによる波動力学の二つの形で提示された．しかし間もなく，シュレーディンガーは波動函数を直交函数系によってフーリエ展開したときのフーリエ係数の作る数ベクトルの変換を考えれば行列が現われ，これによって二つの理論の間の対応が得られることを示した．これは今世紀の始めに知られていた L^2 と l^2 の同型性に基づくのであった．

1924 年に出版されたクーラント・ヒルベルト『数理物理学の方法』第 I 巻には，積分方程式，変分法と共に固有値問題が大きく取扱われて居り，量子力学に必要な数学が既に準備されていた．ヒルベルト学派のこの方面の専門家であったワイルは，シュレーディンガーの質問に答えて，数学としての固有値問題の扱い方を教示し波動力学の創造に助力したのである．

そして間もなくボルンによる波動函数の確率的解釈 (正規化された波動函数 $\psi(x,y,z,t)$ に対し，$|\psi(x,y,z,t)|^2$ が (x,y,z,t) における粒子の存在確率を表わす) が発表された．これらの情勢を見て，フォン・ノイマンは量子力学の基礎を公理的に述べることに成功した．彼は l^2 や L^2 を抽象化したヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を定義し，$\mathfrak{H}$ で稠密な定義域を持つ (有界と限らない) 自己共役作用素 H のスペクトル分解定理 $H=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$ を与えた．射影作用素の族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\boldsymbol{R}}$ を H に対する単位の分解という．ノイマンは量子力学の数学的枠組を次のように定式化した．物理系の状態は，ヒルベルト空間の単位ベクトル φ で表わされ，物理量 $\mathfrak{R}$ は自己共役作用素 R で表わされる．そして状態 φ において，物理量 $\mathfrak{R}_1,\cdots,\mathfrak{R}_n$ のとる値がそれぞれ実軸上の区間 $I_1,\cdots,I_n$ に含まれる確率は $\|E_1(I_1)\cdots E_n(I_n)\varphi\|^2$ で与えられるとした．ここで $\{E_k(\lambda)\}$ は自己共役作用素 R_k の単位の分解である．これによって有限自由度の物理系に対する量子力学は数学的にきちんとした枠組に置かれることになった．そして具体的な諸問題 (例えば散乱問題) は数学としても大いに研究されるようになった．

しかし無限自由度の量子力学 (場の量子論) は，数学的に厳密な取扱いが困難であり今日でも数学者，物理学者の懸案になっている．ファインマンの経路積分の定義や収束の証明はその一つである (参照：池田信行，経路空間上の微積分 — 確率解析と Feynman の経路積分 —)．

4.3 流体力学

古典物理学の中では流体力学は今世紀になって大いに発展した分野である．特に粘性流体の運動を表わすナヴィエ・ストークスの方程式は前世紀に得られたが，非線型の偏微分方程式であって取扱いが難しくその組織的研究は今世紀になってから行われた．数学者にとってもこれは興味ある方程式であって，30年代のルレイの仕事を始め，E. ホップ，加藤敏夫等極めて多くの研究があるが，未だに残された問題も多い．浅水波の方程式である KdV 方程式については次節で触れる．

自然は豊富であって，その研究からは，数学的にも興味のある多くの問題が発生する．数学が発達すると共に，数学自身の中からも多くの問題が生ずるようになるが，自然界からの問題も数学にとっては非常に重要であり，その研究はまた科学に影響を及ぼす．この相互作用は重視すべきである．

5. 計算機の発達

計算機 (詳しく言えばプログラム内蔵方式のデジタル電子計算機) 発明の歴史は複雑であるがここではそれに立入る必要はない．ここでの問題は，機械としての計算機ではなく，計算機を用いてどのような数学 (または科学) が研究されたかという点にある．

戦争中多くの軍事研究に関係したフォン・ノイマンは陸軍との契約で電子計算機 ENIAC を製作していたモークリー，エッカートのグループに，ゴールドシュタインの紹介で後から参加した．ENIAC はプログラム内蔵方式ではなく，違う問題を扱うときには，配線を変更しなければならなかった．このグループでは次期計算機 EDVAC の計画も話題になって居り，それはプログラム内蔵方式で行こうという共通の了解があったようである．1945年6月30日，フォン・ノイマンは「EDVAC に関する報告第一稿」を ENIAC グループの人達に送った．この内には，プログラム内蔵型計算機の原理が，明快に展開されていた．ゴールドシュタインはこの報告書のコピーを計算機に関心を持つアメリカ，イギリスの学者に配布した．この報告書は翌年「電子計算機の論理設計に関する予備的考察」という題をつけて，フォン・ノイマン，ゴールドシュタイン，バークスの連名で発表された．これによってプログラム内蔵方式の計算機のことをフォン・ノイマン型計算機ともいうのである．しかしこの論文の内容のどこが ENIAC グループの共通見解であり，どこがフォン・ノイマンの独自の意見であるかを分離することは困難である．しかし一方このグループの人達の中でこれだけ論理的に明快な報告書を書ける人はフォン・ノイマン以外にいなかったであろうこともまず確かなことである．

戦後商業用計算機の方向に向ったモークリーとエッカートと別れてフォン・ノイマンは科学研究用の計算機の製作とそれを用いての研究を目指した．この計算機

はノイマンの勤務するプリンストンの高等学術研究所 (IAS) に設置されることになり，その計画を IAS，陸海軍，プリンストン大学，RCA 社 (Radio Cooperation of America) が援助することになった．ノイマンは計算機は非常に広範囲の科学研究にとって有効であると考えていた．その中で特にノイマンが興味を持っていたのは，当時の数学では解くことができず，また従来の手動計算機やリレー計算機，パンチカード計算機などの能力の外にある非線型現象の高速デジタル計算機による数値的な解明であった．特に彼が興味を持ったのは流体力学であって，衝撃波や乱流の問題の重要性を強調している．

またフォン・ノイマンは気象学にも関心を持ち，数値予報が計算機を利用することによって可能となるのではないかと考えた．大気については，熱の出入りがあるので単に空間的な移動だけではとらえられない．既に 1904 年に，ノルウェーの気象学者 V. ビャークネスは，大気の速度の x, y, z 成分をそれぞれ u, v, w とし，密度，気圧，温度を ρ, p, T としてこの 6 個の未知函数 (u, v, w, ρ, p, T) に対する 6 個の連立非線型偏微分方程式を立てている (独立変数は (x, y, z, t))．この偏微分方程式系を差分方程式系で近似し，その差分方程式系をある時刻におけるいくつかの観測点における (u, v, w, ρ, p, T) の観測値を初期値として数値的に解き，例えば 24 時間後の値を求めるというのが (短期) 数値予報の原理である．この際，差分方程式の解が元の微分方程式の解の近似であるためにはいわゆるクーラントの条件をみたす必要がある．1946 年当時，数値予報が実際可能であると考えている気象学者は殆んどいなかった．

ノイマンは気象学者ロスビーと協議してこの問題を考える委員会を作り，また一方では研究所にこの問題を研究し，計算機に掛けられるようにする作業を実行するための気象学者のグループを集めた．最初期の計算機の能力からその人達にとっては考える問題を可能な限り単純化するモデルを考えることが目標になった．この人達は，3 次元モデルでは計算量が多すぎるので，気圧 500 ミリバール (高度約 6000 メートル) の面で考えることにして，2 次元モデルを採用した．また大気中の音波や重力波は気象上意味を持たないので，運動方程式にある種の平衡条件を課して，これらの運動を除去することにした．また渦の発生や消滅のないモデルを採用した．台風の発生，消滅などは別のモデルで扱うことにしたのである．こうしてフィルターのついた順圧モデルが得られた．24 時間後の予報は，このモデルによって北米の大部分をカヴァーする約 200 マイル間隔の 361 個の格子点について行われた．

研究所の計算機がまだ完成していなかったので，気象グループは ENIAC を利用して，順圧モデルによる 12 時間後，24 時間後の予報の計算を実行した．とは言っても ENIAC の計算速度が遅いので，実際にはずっと時間がかかり，この時点ではまだ予報とはなっていなかった．1949 年 1 月 5, 30, 31 日, 2 月 13 日の気象データ

を用いて計算した結果と観測値とを比較して見ると，気象状況によって結果の良否は分れたが，特に 1 月 31 日の予報は驚異的に正確なものであることがわかった．

こうして比較的短時間の内に殆んど可能性を信ずる人のなかった数値予報は break through を成しとげたのであった．気象グループは次に 2 次元モデルでは不完全なので，3 次元モデルの開発に取掛った．また以上は気象グループが主目標としていた短期予報についてであったが，長期予報は局所的な攪乱でなく，大気の大循環を考えることで行うのであって，大循環を支配する種々の要因と，それらを取入れた数学モデルが研究された．以上のようなプリンストン気象グループの成果に刺激されて，1952 年になると合衆国気象局および軍の気象関係者が，プリンストン・グループに接触して来た．こうして数値予報はアメリカで公式に取上げられることになった．数値予報の実用化までにその後相当の時間を要したが，現在では多くの国々で数値予報が実用化されている．しかしその始まりはフォン・ノイマンのイニシャティヴから始まったことは注目すべきである (この項はアスプレイ『ノイマンとコンピュータの起源』[14] を参照した).

非線型現象の研究の例としてソリトンを取上げよう．フォン・ノイマンの設計した IAS の計算機を原型とする計算機が十数個所の研究所，大学に設置されたが，1952 年ロス・アラモスの研究所にもそれが作られ MANIAC と名づけられた．この計算機を用いた初期の研究の中に，フェルミ・パスタ・ウラムによる非線型な相互作用を持つ 1 次元格子についての数値実験があった．ここでは有限個の粒子がバネで結ばれているが，バネの力は伸びに比例する力に，伸びの 2 乗 (または 3 乗) に比例する力が加わったものとされた．伸びに比例する力だけであれば，この系の運動は周期的な振動になることが直ちに示される．一方伸びの 2 乗に比例する力が加わった非線型の場合には，周期的とはならずエルゴード的になるだろうというのがフェルミ達の予想であった．所が MANIAC による数値実験ではどんな初期状態から出発しても十分時間が経過すると，系は初期状態にもどってしまうことが確認された．つまりこのような非線型な相互作用を持つ場合でも振動は周期的なのであった．物理学者はこれをフェルミ・パスタ・ウラムの再帰現象と呼んでいる．

1965 年ザブスキは，有限個の質点ではなく 1 次元連続体の波動でフェルミ達の例のような再帰現象を示すものを求めて一つの非線型偏微分方程式に到達した．これは 1872 年にブシネスクが提出した浅水波を表わす方程式であった．浅水波の方程式は，1895 年コルテヴェークとド・フリースによって簡単化されたが，それは係数の定数を適当に正規化すれば，

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{5.1}$$

という方程式であった．(5.1) を KdV 方程式という．

コルテヴェーク達はこの方程式が

$$u = 2a^2 \mathrm{sech} a(x - ct + \delta) \qquad a, c, \delta \text{ は定数} \tag{5.2}$$

の形の特解を持つことを確かめた．ただし代入して見ればすぐにわかるように (5.2) が (5.1) の解となるのは波の高さ $2a^2$ と波の速さ c の間に

$$c = 4a^2 \tag{5.3}$$

という関係があるときだけである．(5.2) の時刻 t での波形は，$x = ct - \delta$ に頂点を持つ一つの山から成りこの山が速度 c で動くのである．このような波を孤立波という．さてザブスキとクルスカルは，初期条件を余弦波とした場合の KdV 方程式 (5.1) の解を計算機による数値計算で求めた．いろいろな時刻における波形を求めると，ある程度時間が経過したとき (5.2) によく似た孤立波が 8 個並んで現われたのである．それらの波の高さは皆異なり，波高の高い波ほど速さが大きいので高い波が低い波に追付き追越す現象が見られた．そして追越し後ある時間がたつと高い波も低い波も元の形にもどってしまうのである．即ち個々の孤立波 (solitary wave) が安定した粒子のように振舞うのである．そこでこのような波を陽子 (proton) などの素粒子になぞらえてソリトン (soliton) と呼ぶ．またソリトン解を持つ微分方程式をソリトン方程式という．こうして計算機の数値実験によってソリトンが発見されたのである．このように興味ある現象が発見されたため，KdV 方程式に関する関心が高まり，その理論的解析的研究が行われるようになった．1967 年ガードナー，グリーン，クルスカル，ミウラの 4 人の物理学者は，逆散乱法と呼ばれる，KdV 方程式の解を解析的に求める方法を発見した．これは，固有値 (連続スペクトルを含む) と散乱データを与えて，それを実現するポテンシャルを求める，逆散乱問題が，ゲリファント，レヴィタンとマルチェンコによって解かれているのを巧みに利用したものであった．この逆散乱法は，KdV 方程式だけでなく，他のソリトン方程式にも有効である．逆散乱法の発見によって，ソリトン方程式の数学的研究は急速に進歩した．即ちラックス形式の発見，広田良吾の逆散乱法によらない双線型形式を用いる解の構成法，戸田盛和による戸田格子のソリトン理論，KdV 方程式について，コルテヴーク等が発見した楕円函数を用いる解の一般化として，テータ函数による解の構成等々が得られた．1981 年佐藤幹夫は，ソリトン方程式の一つである KP 方程式 (カドムツェフ・ペトヴィシュヴィリ方程式) について次のことを示した．

1° KP 方程式系の解空間は無限次元グラスマン多様体である．

2° またこの方程式に対する広田の双線型形式はこのグラスマン多様体を定義する 2 次多項式である．

3° 種々のソリトン方程式の解はこの無限次元グラスマン多様体に含まれる．

これはソリトン方程式とその解空間に対する明快な見方を与える．ソリトン方程式は，無限に存在するが，それが一望の下に見渡せるようになったのである．こうしてソリトンの理論は非線型波動の内で，大変美しい大きな理論として確立した．

このように計算機による数値実験で発見された興味ある現象に対しそれを記述，解明する数学理論を求めるというのが，今世紀後半の数学の新しい流れの一つとなった．このように数学理論が発展すると，種々の現象でソリトンが発見されるようになり，それがまたソリトン理論の発展に影響している．

計算機の数学への応用は非線型問題に限るわけではなく広範囲にわたり，有限単純群の分類問題で，いくつかの条件をみたす有限群が実際に存在することを確かめるのに用いられたこともあるし，四色問題の証明にも用いられた．またコンピュータ・グラフィックスが進歩したのでいろいろな図形やグラフを描かせることができ数学者の想像力を刺激する．また数式処理のソフトで良いものができたので数学者が普段している微積分や代数の計算はパソコンでできるようになった．またパソコンのネットワークによる情報交換も広く行われている．こうして計算機は数学者にとっても，なくてはならぬ道具となった．

計算機は数学に用いられるだけでなく，数学に対していろいろな新しい問題を提供する．フォン・ノイマンは，早くから高速計算機の出現に伴って数値解析が革新されなければならぬことを指摘し，自ら線型計算における丸めの誤差の累積について研究を行った．またノイマンは計算機を利用しての数値計算の一般的な方法としてモンテ・カルロ法をウラムと提案した．そしてこれはまた乱数をいかにして発生させるかというもう一つの問題を呼び起した．

計算機の理論的基礎づけでは数理論理学が関係して来る．テュアリングの古典的なテュアリング・マシーンの論文は，そのさきがけとなったのである．本書所収の宮野悟「計算量理論の誕生とその展開」は，計算量理論についての明快な解説である．計算機の応用における数学の使われ方の一例として CT (computer tomography 計算機利用断層写真) を取上げてみよう．

その数学的原理は，1917 年にラドンが与えたラドン変換の逆変換公式にある．これは平面上の函数 f に対し，平面上のすべての直線 l 上における f の積分値 $\hat{f}(l)$ を用いて，元の函数 f を表わす公式であり，本書の吉沢尚明「Radon 変換」に詳しく説明されている．所でこれを用いて CT を実現するにはまた別の困難がある．ラドンの公式は，すべての直線 l に対する $\hat{f}(l)$ の値がわかっているとしてそれから f の値を導く．しかし実際上はすべての直線 l に対する $\hat{f}(l)$ を求めることは不可能であり，有限個の代表的な l に対する $\hat{f}(l)$ の値しか求められないのである．このかなり荒い近似から，いかにして良好な f の値 (画像) を得るかが問題になる．これについては本書の金子晃「コンピュータ・トモグラフィの歴史 — 数学者は何

故ノーベル賞を取り損ねたのか —」に興味深く語られている．

今後計算機はますます発達して行くであろうが，それが引起すいわゆる情報社会のマイナス面にどのように対応して行くかは，人類社会の大きな問題である．これに対し数学が寄与することを期待したいが，例えば数学で現在行われている暗号研究が，インターネットのプライヴァシー保護に役立つであろうか．

6.　20 世紀数学の点描

20 世紀において，数学の各分野はそれぞれ見るべき成果を挙げたが，それらは19 世紀数学の単なる延長ではなく，新しい現象や新しい視点，方法の発見と結びついているものが多い．以下では 20 世紀数学のこのような質的変化を示すいくつかの結果を紹介する．勿論ここに挙げたもの以外にも多くの重要な研究がある．ある研究を始めるには，研究者の側に動機が必要である．また成功した研究が一つあれば，同じ対象に対する失敗した研究や部分的にしか成功しなかった研究がいくつかあるのが普通である．ここでは，これらについて全面的に述べる余裕がないので，結果のみを列挙することになるが，それは大きな山脈の中のいくつかのピークを指摘しているに過ぎない．ここで取上げたのは，次の七つの話題である．

1. 数学の基礎の危機
2. ブラウン運動・確率過程
3. 不完全性定理
4. 超函数
5. エグゾティックな微分構造
6. 有限単純群の分類
7. リーマン予想

6.1　数学の基礎の危機

1902 年ラッセルは，ラッセルの逆理を発見して，フレーゲに知らせた．これは，自分自身を含まない集合の全体を M とする ($M = \{x | x \notin x\}$) とき，M 自身が M に含まれるかどうかを問うと

$$M \in M \iff M \notin M$$

という矛盾が生ずることを指摘したものであった．これ以前にも，集合の全体や順序数の全体を集合と考えると矛盾が生ずることは知られていたが，当時はカントールの集合論自身が一般に認知されていなかったので，それ程問題になっていなかった．これに対し，ラッセルの逆理は，集合概念そのもの，論理そのものに対する逆理として，重く受けとめられた．フレーゲやデーデキントは，集合概念を用いて数学を基礎づけた自分達の仕事の根柢がゆらいだと考えた．

この逆理の解決には，数年を要した．そしてそれが解決となっているという認識が一般のものになるにはさらに長い時間が必要であった．解決は二つの面からなされた．一方は集合概念のあいまいさが原因であるとして，集合論を公理化したツェルメロの仕事 (1908 年) でなされた．単に集合を「物の集まり」と考えている限り，上の M も集合とせざるを得ないが，ツェルメロの公理的集合論では，矛盾を含む M は集合ではないとして排除され，矛盾は生じない．

一方でラッセルは,「すべてのクレタ人は嘘つきだと，あるクレタ人が言った」というような自己言及的な文章の真偽に関する意味論的逆理の解決を目指した．それは,「対象世界についての命題と，そのような命題について発言している命題は，階層を異にするものであり，これを混同するとき，意味論的逆理が生ずる」という認識に基づく．ラッセルは，この階層の区別を取入れた論理学として，型の理論 (type theory) を開発し，それを用いて数学を論理的に展開できることを示した『数学原理 (principia mathematica)』3 巻 [12] を，A.N. ホワイトヘッドと共著で刊行した (1910-13 年)).

後にスコーレムが注意したように，公理的集合論は，一階述語論理の範囲で展開できる．従って通常の数学では二階以上の論理は必要ないし，型の理論もいらない．しかし数学基礎論では，今でも型の理論は用いられている．またヒルベルトの証明論でも，形式化された数学そのものと，それを対象とする超数学の区別は，基本的なものとされて居り，上に述べたラッセルの認識は生きているのである．

こうして一応種々の逆理は克服されたのであるが，この数学の基礎の危機は，数学の基礎をどのように考えるかについて，一層深く考えるきっかけを与えた．ヒルベルトは，内容を捨象して論理的な側面のみを考えるとき，数学の各分野は，公理系から出発して論理の法則に従って組立てられて行く体系であり，公理系のみたすべき唯一の条件は，その無矛盾性であるとした．この立場を形式主義という．これに対して B.J.L. ブラウアーは，単に無矛盾なだけの体系は，数学的に無意味であるとし，数学の対象となるものは，一歩一歩構成されて行くものでなければならないとした．この立場から，論理の原則として考えられて来た排中律は，常に成立つとは言えないとした．この立場を直観主義という．

ヒルベルトは，このブラウアーの考え方を，数学本来の自由な思考に著しい制約を加えるものとして，強く反対した．そして彼の思想に沿って，数学を基礎付ける

ために，自然数論，実数論などの無矛盾性を証明することを目標にして，証明論の構想を立てた．その結果がどうなったかは，不完全性定理の項で述べよう．

6.2　ブラウン運動・確率過程

1908 年刊行の『科学と方法』(吉田訳岩波文庫．p.133) の中で，ポアンカレは，至る所微分不可能な連続函数などを，論理の生み出した怪物と呼び,「かつては新しい函数がつくられるとすれば，それは何か実用上の目的を達するためであった．今日では，人はただ先人の推理の謬まりを探し出すために殊更につくり出すのであって，これからは，このこと以外得るところは何ものもないのである」と述べた．偉大なポアンカレのこの言葉に対する反証が，ポアンカレの死後 11 年目の 1923 年に発表された．

ウィーナーは論文「微分空間」の中で，ブラウン運動をする粒子の殆んどすべての軌跡は，連続ではあるが至る所微分不可能であることを示したのであった．

時間と共に変化する偶然現象を解析する数学理論が，確率過程論である．見方によれば，それは確率論の始まりからあったとも考えられるが，今日の意味での確率過程論は，1906 年のマルコフによるマルコフ連鎖の研究あたりから始まると考えられているようである．しかし 1900 年バシュリエ，1905 年アインシュタイン，1906 年スモルコウスキーによるブラウン運動の研究は，最初期における確率過程論の研究と見なせる．ブラウン運動は，熱運動する液体分子がブラウン粒子に衝突して起ることは，既に 1888 年にグイが述べている．個個の分子の動きは予測できないので，ブラウン運動をする粒子の運動は，確率論によってとらえるより外はない．

アインシュタインは，時刻 0 から $t>0$ までのブラウン粒子の変位の自乗平均を求めて

$$\overline{x^2}=2Dt$$

という結果を得た．ここで D は液体中の粒子の拡散係数で

$$D=RT/6\pi kPN$$

である．ただし R は気体定数，T は絶対温度，k は液体の粘性係数，P は粒子の半径，N はアヴォガドロ数である．この式を用いて，実験によってアヴォガドロ数を決定できることをアインシュタインは注意した．この実験を行ったのはペランであり，アインシュタインの理論の正しさを，実験的に確めると共に，分子の実在をはっきり示すことができた．これによって分子の実在を否定していたオストワルド達も，分子の存在を認めざるを得なくなった．

これらの初期の研究に対し，ウイーナーの新しい点は，ブラウン運動をする個個の粒子の描く経路の数学的性質を追求した点にある．そしてそのためにウイーナー

は，ブラウン粒子の経路である連続函数の空間に，全測度が1のルベーグ測度 (完全可法的測度) を導入した．ルベーグは1902年の学位論文でルベーグ測度を導入し，ヤング，ダニエル等何人かの人達がそれについて論じたが，このような無限次元の函数空間への測度の導入は，ウイーナーが始めてであった．このウイーナー測度の与えられた連続函数の空間 (ウイーナー空間) は，今日までブラウン運動の数学モデルの基礎として用いられている．後にウイーナーは，ペイリーとの共著の中で，ランダム・フーリエ級数を用いる，ウイーナー測度のもう一つの定義を与えた．

確率論は，長い歴史を持つが，確率とは何かという問には，仲仲うまい答が見つからなかった．確率をどのような根拠に基づいて定めるかに関しては，経験確率，論理確率，主観確率の三つの考え方があった．ヒルベルトは，その第六問題において，確率論の公理系を求めることを問題として提出した．

1933年コルモゴロフは，偶然性の議論に立入ることを避けて，確率の加法性を中心にして，確率論の公理系を作った．それは確率とは，ある空間 X 上の完全加法的集合族 $\mathcal{B}$ 上で定義された，全測度1の完全加法的測度 p であり，確率変数とは，X 上の可測函数のことであるとするものであった．

コルモゴロフは，それと共に確率空間の無限個の直積上に確率測度が構成できるための条件を与えたコルモゴロフの拡張定理を証明した．これによって種々の確率過程に対し，基礎となる確率空間が構成できるようになった．こうしてコルモゴロフの公理系は，確率過程論に数学的な基礎を与えるものとなり，以後の確率論発展の基礎となった．

このコルモゴロフの確率論の公理系は，ツェルメロによる集合論の公理系と並んで，ヒルベルトの公理主義の最も成功した二つの例と言える．

今世紀後半の確率論の種々の方向への発展については，本書所収の，飛田武幸，山田俊雄，池田信行，高橋陽一郎の諸氏の書かれたものを見られたい．

6.3　不完全性定理

2で述べたように，ヒルベルトは数学各分野の基礎づけは，その分野に完全な公理系を与え，その無矛盾性を証明することによってなされると考えていた．このプログラムを実現する基礎的道具として，ヒルベルトはアッカーマンと共著で記号論理学の教科書を書き，特に一階述語論理の体系を与えた．1930年ゲーデルは，一階述語論理の完全性を証明した．これはすべてのモデルで真な命題は証明できるという内容で，一階述語論理の公理系には，追加すべき公理はないことを意味する．

数学のある理論 T の無矛盾性の証明は，次のようにして可能であるとヒルベルトは考えた．T 内の命題は，少数の基本述語といくつかの変数および論理記号を用いて論理式の形に書くことができる．T の公理を表わす論理式に，論理の公理と推論規則を有限回適用して得られる論理式が，T 内で証明された命題を表わす．

従って T 内における証明は，公理から出発して，推論図を次次に有限個書いて行くことで表わされる．数学の命題には，内容的な意味があるが，論理的に証明の構造を調べようとするときには，形式主義の立場では，証明図を記号の排列と考え，T 内の証明図の終式として，P と P の否定の双方が現われることは決してないことを示すことによって，理論 T の無矛盾性を証明しようとするのである．この無矛盾性の証明をする際には有限個の記号の排列に対する単純な推論のみを用いるのであって，これをヒルベルトは有限の立場と呼んだ．形式的数学の内部では用いられる排中律などは，超数学では用いないのである．ヒルベルト学派では，ごく簡単な公理系で，このやり方で無矛盾性が証明できるものを見出して居り，いよいよ自然数論のような内容のある理論の無矛盾性の証明に進もうとしていた．

このときゲーデルの不完全性定理が出現したのである．自由変数を含まない論理式を命題というが，普通に考えれば，それは真偽が定まっているはずである．

所がゲーデルは，次のことを証明したのであった．

第一不完全性定理

1 階自然数論 (PA)，公理的集合論 (ZF)，数学原理 (PM) の各体系が無矛盾ならば，それぞれの理論体系 T 内の命題 P であって，P とその否定 $\neg P$ のどちらもが，T 内では証明できないものが存在する．

これは形式化された無矛盾な数学理論 T が，自然数論を含んでいれば，T 内で真偽を決定することが不可能な命題が，T 内に必らず存在することを示している．これはそれ迄の公理化された数学理論についての通念を覆すものであった．それまでは証明できない命題があるのは，公理が足りないせいで，公理を適当に追加すれば，すべての命題の真偽が決定されるはずだと考えられていたのである．ゲーデルが示したのは，その反対であって，不完全性定理の成立つ体系 T に，決定不能命題 P を公理として追加して，新しい体系 T' を作っても T' にも必らず決定不能命題があることになるのである．

なおゲーデルは，P の否定 $\neg P$ が T 内では証明できないことを示すのに，T の無矛盾性より少し強い ω-無矛盾性を仮定して証明したのであるが，後にロッサーが，無矛盾性の仮定から同じ結論が導かれることを証明したので，上のように述べた．

さて上の第一不完全性定理から，次の第二不完全性定理が得られる．

第二不完全性定理

T が PA, ZF, PM のいずれかであるとき，もしも T が無矛盾ならば，その無矛盾性は T 内では証明できない．

この定理は，数学理論の無矛盾性を証明しようとする，ヒルベルトの計画に重大な原理的制約を課すものであった．ゲーデル自身はこれはヒルベルトの形式主義を否定するものではないことを注意している．しかし第二不完全性定理は，数学理論

T の無矛盾性を証明するためには，超数学として T 内にない何かを用いる必要があることを教えている．

ゲーデルの結果は，ヒルベルト学派に衝撃を与えたが，直ちに受け入れられた．それはゲーデルの論文が明快で疑問の余地がなく，かつその証明に用いた原始帰納函数とゲーデル数化は，厳格な意味での有限の立場に立つものだったからである．

ヒルベルト学派は，ゲーデルの結果によって有限の立場をそれまでより拡張する必要を学んだのであった．そうして 1936 年に，ゲンツェンは一階自然数論の無矛盾性を証明したが，その際ゲンツェンは，最初の ε 数 ε_0 以下の順序数に対する (有限の立場での) 超限帰納法を，証明に用いたのであった．このような順序数は，0 と ω から出発して，和と冪を作ることを有限回繰返して作られるから，確かに有限的に構成される対象ということができる．

ゲンツェンの結果をどう考えるかは，数学者の中でも意見が分れている．筆者は自然数論の正しさを疑ったことはない．従ってゲンツェンの定理によって始めて自然数論の正しさがわかったとは考えない．しかし有限モデルを持たない自然数論について，無矛盾性の証明が出来たことは，興味ある証明論の結果だと考える．

有限の立場で，実数論の無矛盾性を証明することは，現在でもできていない．

しかし竹内外史は，二階自然数論のある部分体系 ($\Pi_1^1 : CA$) について，ゲンツェンの方法を拡張して無矛盾性の証明に成功した．この体系は，解析学と記述集合論のかなり広い範囲を含む．

またこの部分体系は，本質的に非可述語的であり，そのような体系で無矛盾性が証明された最初の例としても意義がある．ただしその証明は，ゲンツェンのものより，ずっと難しくなっている．

6.4　超函数

ディラックは，量子力学に現われる種々の計算 (例えば連続スペクトルが現われる場合の固有函数展開) を，見通しよく行うために，デルタ "函数" $\delta(x)$ を導入した．簡単のために一変数で考えるとき，これは任意の連続函数 $\varphi(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \tag{6.1}$$

となるような "函数" である．しかし普通の意味の函数では，このようなものは存在しないことはすぐわかる．しかしディラックの形式的な計算がうまく行き，物理学で広く用いられるようになったことは，そこに何等かの数学的な機構が存在することを示唆する．そのような数学的機構として考えられたのが，函数概念の拡張として一般化函数あるいは超函数を導入することであった．

このような函数概念の拡張の必要性は，デルタ函数だけではなく，数学のいろいろな問題の中で感じられるようになっていた．その中で特に重要なのは偏微分

方程式の境界値問題である．例えばラプラス方程式の円または球の内部での解は，境界値にポアッソン核を掛けたものの円周または球面上の積分として表わされる．

しかし 20 世紀になり，より一般の方程式，より一般の領域で考えるようになったとき，このような具体的な解の表示式は，得るのが困難になって来る．そのために解の存在と一意性を先ず示し，次にその解の性質を調べるという方法が行われるようになった．解の存在を示すには，種々の方法がある．グリーン函数の利用，積分方程式への転換，不動点定理の応用等々である．よく用いられる方法として，解の概念を拡張して，いわゆる弱解を用いるものがある．これは何人かの人が考えたが，例えばソボレフは，1936 年の論文でこれを導入している．

以上のような状況の下で，L. シュワルツは，函数および測度の概念の一般化としての超函数 (distribution) を導入し，微積分やフーリエ変換などの解析学の諸演算を，超函数に対しても定義し，それがスムースに働き，解析学の用具として役立つことを示した．それは単行本『超函数論』として 1950 年に発表された．その基本的な考え方は，次の通りである．

n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ (その開集合 Ω でもほぼ同様) 上の無限回微分可能な複素数値函数 φ で，あるコンパクト集合 K (φ 毎に異なる) の外では 0 となるもの全体の空間 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ とする．$\mathcal{D}$ から複素数体 $\boldsymbol{C}$ への線型写像 T で，次の (6.2) の意味で連続となるものは，$\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数といい，その全体を $\mathcal{D}'$ と記す：

$\mathcal{D}$ の点列 $(\varphi_m)_{m\in\boldsymbol{N}}$ が次の (a)(b) をみたすとき，　(6.2)
$\boldsymbol{C}$ の点列 $(T(\varphi_m))_{m\in\boldsymbol{N}}$ は 0 に収束する．

(a) 一つのコンパクト集合 K が存在して，すべての φ_m は K の外で 0 となる．
(b) (φ_m) およびその任意の偏導函数列は，$\boldsymbol{R}^n$ 上一様に 0 に収束する．

例 1. $f(x)$ が $\boldsymbol{R}^n$ 上の可測函数で，任意のコンパクト集合上可積分 (局所可積分) であるとすれば，f によって定義される $\mathcal{D}$ 上の線型形式

$$T_f(\varphi)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi\in\mathcal{D} \tag{6.3}$$

は，$\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数である．連続性はルベーグの項別積分定理から導かれる．(6.2) の条件をみたす $(\varphi_m)_{m\in\boldsymbol{N}}$ は，一様有界であることを用いる．

例 2. μ が $\boldsymbol{R}^n$ 上のボレル集合族 $\mathcal{B}$ 上の複素数値実加加法的測度で，有界ボレル集合に対し有限の値をとるものとすれば，

$$T_\mu(\varphi)=\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x)\,d\mu(x), \qquad \varphi\in\mathcal{D} \tag{6.4}$$

で定義される $\mathcal{D}$ 上の線型形式 T_μ は，$\boldsymbol{R}^n$ 上の超函数である．連続性は例 1 と同様．

シュワルツは，超函数を分布 (distribution) と呼んだが，これは電荷や質量分布がイメージにあったと思われる．ディラックのデルタ函数は，原点におかれた単位電荷が定める測度である．一般に点電荷，体積分布，面分布，線分布の電荷は測度であり，例 2 によって超函数と考えられる．一方二重極 (双極子) やその面分布である二重層は，すぐ後で定義する測度の微分である．実体的にはこのように超函数には，種々のものが含まれるが，それを機能的に，連続一次形式として (6.2) のように定義する所に，20 世紀数学の一つの特徴がある．

さらに超函数 T を，$\boldsymbol{R}^n$ の第 i 座標 x_i で偏微分した超函数 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ を次の (6.5) で定義する：

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = T\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D} \tag{6.5}$$

特に $T = T_f$ で，f が x_0 について C^1 級ならば，部分積分をするとき，φ が有界集合の外で 0 となることから，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(x)\,dx$$

が成立つから，(6.5) の定義はこの場合の拡張になって居り，自然なものである．

例 1 の f は局所可積分でありさえすればよいから，極めて不連続なもの，例えばカントール函数のようなものも含む．それにも拘らず，定義 (6.5) によって，T_f は微分可能となり，それを繰返して何回でも微分可能となる．これは試料函数として何回でも微分可能なコンパクト台の函数を選んだからであり，シュワルツのうまい所である．

超函数を用いると解析学（偏微分方程式論，変分法等）で有用なソボレフ空間 $H^m(\Omega)$ が明快に定義される．多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{N}^n$ に対し，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

とおく．$\boldsymbol{R}^n$ の領域 Ω 上の函数 f で，超函数としての m 階までの偏導関数 $D^\alpha f\,(|\alpha| \leq m)$ がすべて $L^2(\Omega)$ に属するようなものの全体を $H^m(\Omega)$ とおく．$H^m(\Omega)$ の元 f のノルム $\|f\|_{H^m(\Omega)}$ を

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha \varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.6}$$

と定義するとき，$H^m(\Omega)$ はヒルベルト空間となる．また 2 乗の代りに p 乗 $(p \geq 1)$ とすることによってバナッハ空間 $W_p^m(\Omega)$ が生ずる．これら $H^m(\Omega), W_p^m(\Omega)$ を Ω 上のソボレフ空間という．これらはヒルベルト空間，バナッハ空間の構造を持

つので，函数解析の種々の手法が適用できる．ソボレフ空間とアプリオリ評価を組み合わせて，楕円型偏微分方程式の境界値問題の解の存在を示すのが，20 世紀における この方面の標準的解法の一つとなっている．

ただしこの方法で解 u の存在が言えたとき，u はソボレフ空間の元というだけなので，普通の意味で微分可能かどうかはわからない．一般にこのように超函数としては偏微分方程式の解となっている函数が，普通の意味でも必要なだけ微分可能で，古典的な意味でも解になっているかどうかを調べることが重要な問題となる．この問題の解は，偏微分方程式の型によって異なる．楕円型方程式では，方程式の係数は C^∞ 級または実解析的であれば，解も必らずそれに応じて C^∞ 級または実解析的になるが，双曲型方程式ではそうならないのである．

偏微分方程式の解法として古くから知られているものに基本解を用いる方法がある．$\boldsymbol{R}^n$ の領域 Ω 上で定義された，m 階線型偏微分作用素 $L = L(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} L_\alpha(x) D^\alpha$ の基本解 $E(x, y)$ とは，直積 $\Omega \times \Omega$ 上で高々対角線集合を除き定義された函数 $E(x, y)$ であって，

$$L(x, D)E(x, y) = \delta(x - y)$$

をみたすものをいう．このとき任意の $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して

$$u(x) = \int_\Omega E(x, y) f(y)\, dy$$

は，偏微分方程式 $Lu = f$ の解となる．ラプラシアン Δ や熱作用素 $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ に対しては，古くから基本解が知られていたが，E.E. レヴィは逐次近似法を用いて，高階楕円型作用素の基本解を構成した (1909 年)．1950 年代になると，フーリエ変換を利用して，エーレンプライスとマルグランジュはそれぞれ独立に，任意の定数係数線型偏微分作用素 L は，常に基本解を持つことを示した．従って任意の $f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して，定数係数偏微分方程式 $Lu = f$ は，解を持つ．

所が変数係数方程式では，全く事情が異なることを H. レヴィが 1957 年に例で示した．レヴィは，$f(t)$ を実数値函数とする一階線型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x + iy)\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) \tag{6.7}$$

が，原点の近傍で C^1 級の解 $u = (x, y, t)$ を持つならば，f は $t = 0$ の近傍で収束冪級数で表わされることを証明した．従って (6.7) において，f が解析函数でない C^∞ 級函数とすると (6.7) は C^1 級の解を持たない．後にヘルマンダーは，f が解析函数でないとき，(6.7) は超函数の解をも持たないことを証明した．

正規形の常微分方程式系では，右辺が連続なら必らず解があるのと比較してこれは極めて興味ある結果である．

函数概念の有用な拡張は，シュワルツの超函数に限らない．佐藤幹夫は1958年に解析函数の境界値として，函数概念を拡張する方法を発表した．佐藤はこれを超函数 (hyper function) と呼んだ．一変数のときは，その定義は簡明であるが，多変数のときには，層係数の相対コホモロジー群を定義に用いる．従って定義自身がかなり sophisticated なものとなるので，シュワルツ超函数程普及はしていない．しかし一方それは直接解析函数と結びついている所に特長があり，種々の深い結果を生んでいる．佐藤超函数は，シュワルツ超函数を含んでいるが，実際に後者より広い概念である．そのことが有効な一つの例を挙げよう．単位円板のポアンカレ計量に関するラプラシアンの固有函数は，境界値のポアッソン積分で表わされる．このときすべての固有函数を得るためには，境界値として佐藤超函数全体をとる必要がある．シュワルツ超函数だけを境界値にとったのでは，固有函数の一部しか得られないのである．

一般の非コンパクト半単純型対称リーマン空間に対しても，この結果が拡張されることは，岡本清郷，大島利雄等によって証明された (1978年).

6.5 エグゾティックな微分構造

1956年ミルナーは，7次元球面 S^7 上に複数の異なる微分可能多様体 (C^∞ 級) の構造 (微分構造) が存在することを証明した．それをミルナーがどうして示したかを見てみよう． S^7 が S^4 を底空間，S^3 をファイバーとするファイバー・バンドルとなることは，1935年に H. ホップが示していた．ミルナーは，このファイバー・バンドルを定義する変換函数を少し変形することによって，各整数 h に対し C^∞ 級多様体 M_h を定義した．定義から各 M_h は，やはり S^4 を底空間，S^3 をファイバーとするファイバー・バンドルで，位相的には通常の7次元球面 S^7 と同相である．そして $M_0 = S^7$ は，通常の微分構造 ($\boldsymbol{R}^8$ の微分構造から導かれるもの) を持つ．M_h の中に M_0 と微分同相でないものが存在することを示すために，ミルナーは $\lambda(M)$ という不変量を導入した．

$\lambda(M)$ は，7次元のコンパクト C^∞ 級多様体 M で，$H^3(M, \boldsymbol{Z}) = H^4(M, \boldsymbol{Z}) = 0$ をみたすものに対して定義される量で，値は群 $\boldsymbol{Z}/7\boldsymbol{Z}$ の元である．彼は指数定理や特性類についてのヒルツェブルッフの研究を用いて，$\lambda(M)$ が M の微分構造の不変量であることを示した．従って $\lambda(M) \neq \lambda(M')$ となる二つの多様体 M, M' は微分同相ではない．そしてミルナーは，上述の多様体 M_h に対し，$\lambda(M_0) = 0, \lambda(M_2) \neq 0$ であることを示したのであった．

ミルナーとケルヴェアは，組み合わせ多様体としての n 次元球面上の微分構造は，連結和による加法に関してアーベル群 Γ_n を作ることを示した．そして $n \neq 3$ ならば，群 Γ_n はホモトピー n 次元球面の h -同境群 θ_n と同型であり，有限群であることを示した．これにより n が小さいとき Γ_n を計算できる．その一部を次

に掲げる．$|\Gamma_n|$ は Γ_n の位数，即ち S^n 上の相異なる微分構造の個数である．

n	$n<6(n\neq 4)$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\|\Gamma_n\|$	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2

例えば S^7 上には，丁度 28 個の相異なる微分構造が存在するのである．

また S^4 上にはいくつ微分構造があるかわかっていない．

後にブリースコルンは，S^7 と同相な，相異なる 28 個の C^∞ 級多様体を 10 次元空間 $\boldsymbol{R}^{10}=\boldsymbol{C}^5$ 内の 7 次元曲面として，簡単な方程式で定義できることを示した．いま

$$B(k)=\Big\{(z_1,\,z_2,\,z_3,\,z_4,\,z_5)\in\boldsymbol{C}^5\,\Big|\sum_{j=1}^{5}|z_j|^2=1,\,z_1^3+z_2^{6k-1}+z_3^2+z_4^2+z_5^2=0\Big\}$$

$$1\le k\le 28$$

とおくと，この 28 個のブリースコルン多様体 $B(k)$ は，すべて 7 次元球面と同相であるが，$k\neq k'$ ならば $B(k)$ と $B(k')$ は微分同相ではないのである．従ってこの 28 個の $B(k)$ が，S^7 上の相異なる微分構造のすべてを与える．

このミルナーの仕事をきっかけにして，微分位相幾何学が急速に発達した．

また位相多様体，組合せ多様体，微分可能多様体の相互関係が注目されるようになった（任意の C^1 級多様体には，C^∞ 級および実解析的多様体の構造が入ることがホィットニーによって証明されているので，微分可能多様体としては C^∞ 級のものだけを考えればよい）．

パラコンパクトな任意の微分可能多様体は，単体分割することができ，一意的に組合せ多様体の構造を持つことは，既に 1930 年代に，ケアンズと J.H.C. ホワイトヘッドが証明している．また組合せ多様体で微分構造を持たないものがあることは，ケルヴェアが 1969 年に示した．

位相多様体の単体分割可能性とその一意性 (基本予想) については，カービイとシーベマンによって 1969 年に解決された．これについては，本書の松本幸夫「基本予想をめぐって」に，興味深く解説されている．

1982 年に，4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ は，複数の微分構造を持つことが発見された．すぐ後に $\boldsymbol{R}^4$ 上には，非可算濃度の異なる微分構造が存在することがわかった．$n\neq 4$ のとき，$\boldsymbol{R}^n$ の微分構造は唯一つであることがわかっているから，4 次元の場合は全くの例外である．4 次元の世界は，他の次元と非常に異なるものであることを，この結果は示している．

4 次元トポロジーは，70 年代から 80 年代にかけて，キャッソン，フリードマン，ドナルドソンの三人によって重要な進歩がなされ，独自の分野として確立した．

キャッソンは，自己と交わる円板の無限反復を作り，その開近傍として，一つの 4 次元 C^∞ 級開多様体 H を構成した．この H がキャッソンのハンドルと呼ばれるものである．キャッソンは，H が円板と平面の直積 $D^2 \times \boldsymbol{R}^2$ と同じ固有ホモトピー型を持つことを示したが，H と $D^2 \times \boldsymbol{R}^2$ が同相または微分同相であることは，証明できなかった．そしてもしこれが証明できれば，4 次元トポロジーの種々の問題が解けることを示したのである．

これを受継いで，H と $D^2 \times \boldsymbol{R}^2$ が同相であることを示したのがフリードマンであった (1981 年)．これからフリードマンは，次に述べる 4 次元の単連結閉多様体 M に対する基本定理を得たのであった．このとき M は単連結だから $H_1(M, \boldsymbol{Z}) = 0$ である．従ってポアンカレの双対定理によって，ねじれ係数についても $t_2 = t_1 = 0$ であり，$H_2(M, \boldsymbol{Z})$ は $\boldsymbol{Z}$ - 自由加群である．二つの 2 次元サイクル C_1, C_2 の交点数を $C_1 \cdot C_2$ とするとき，これによって非退化対称双一次形式 $\Phi : H_2(M, \boldsymbol{Z}) \times H_2(M, \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{Z}$ が定義される．この Φ を M の交点形式という．4 次元単連結閉多様体 M の重要な位相不変量は，すべてこの Φ で定まるのである．M, N を二つの 4 次元単連結閉多様体とし，$H_2(M, \boldsymbol{Z}), H_2(N, \boldsymbol{Z})$ の $\boldsymbol{Z}$ 基底 $(x_i), (y_j)$ を適当にとると， M, N の交点形式 Φ_M, Φ_N から生ずる行列 $(\Phi_M(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq m}$, $(\Phi_N(y_k, y_l))_{1 \leq k,l \leq n}$ が一致するとき，Φ_M と Φ_N は同値であるという．

フリードマンの基本定理

(a)(存在定理)　$\boldsymbol{Z}$ 上で定義された任意の非退化対称双一次形式 Φ に対して，Φ を交点形式とする 4 次元単連結閉多様体 M が存在する．

(b)(一意性定理)　(i)　Φ が II 型 (対角成分が偶数) のとき，Φ を交点形式とする 4 次元単連結閉多様体はすべて互いに同相である．

(ii)　Φ が I 型 (II 型でない) のとき，Φ を交点形式とする 4 次元単連結閉多様体の同相類は，丁度二つある．

この基本定理は，特別の場合 ($H_2(M, \boldsymbol{Z}) = 0$ のとき) として，4 次元ポアンカレ予想を含んでいる．実際このとき，上の (b)(i) によって，4 次元球面 S^4 とホモトピー同値な，4 次元単連結閉多様体 M は，S^4 と同相である．また $\boldsymbol{R}^4$ と固有ホモトピー形が同じであるような，4 次元位相多様体は $\boldsymbol{R}^4$ と同相になる．

さて上のフリードマンの基本定理は，4 次元位相多様体に関するものであって，4 次元の微分可能多様体について，その類似は成立たない．特に交点形式 Φ は任意では有得ない．既に 1950 年代に，ロホリンは，4 次元微分可能多様体の交点形式の符号数 (正の固有値の個数 — 負の固有値の個数) は，16 で割り切れなければならないことを証明していた．これについてドナルドソンは，次の基本定理を，1982 年に証明した．

ドナルドソンの基本定理

4 次元の微分可能な向きづけられた単連結閉多様体の交点形式 Φ が正定符号ならば，Φ は単位行列で表わされる 双一次形式と同値である．

例えば階数 8 の例外単純リー環のルート系のカルタン行列において -1 をすべて 1 に変えた行列を E_8 とすると，E_8 の符号数は 8 なので，ロホリンの定理により，E_8 は 4 次元微分可能多様体の交点形式となり得ない．$E_8 \oplus E_8$ はロホリンの定理には抵触しないが，正定符号でしかも単位行列に同値でないから，ドナルドソンの基本定理により，4 次元微分可能多様体の交点形式に成得ない．

$\boldsymbol{R}^4$ のエグゾティックな微分構造の存在が，ドナルドソンの基本定理から導かれることは，フリードマンとカービイによって示された．以下松本 [34] によって，その説明を試みよう．M を $K3$ 曲面の一つとする．これは 4 次元の C^∞ 級単連結閉多様体である．M に通常と逆の向きをつけるとき，その交点形式は，行列

$$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表わされる．今 M 内の三つの開集合 $O_i (1 \leq i \leq 3)$ を適当にとると，交点形式を O_1, O_2, O_3 上で考えたものが丁度 $U \oplus U \oplus U$ になるようにできる．さらに O_i は $S^2 \times S^2$ の中に滑らかに埋め込まれ，さらにコンパクト集合 F_i が存在して，$F_i \subset S^2 \times S^2$ と埋め込んだとき，次の (i), (ii) が成立つようにできる．

(i)　この埋め込みにより，$H_2(F_i, \boldsymbol{Z}) \cong H_2(S^2 \times S^2, \boldsymbol{Z})$.

(ii)　$S^2 \times S^2 - F_i = V_i \ (i = 1, 2, 3)$ と置くとき，V_i は $\boldsymbol{R}^4$ と同じ固有ホモトピー型を持つ．

このときフリードマンの結果により V_i は $\boldsymbol{R}^4$ と同相になる．V_i は $S^2 \times S^2$ の開集合として，微分可能多様体であるが，三つの V_i の内少くとも一つは $\boldsymbol{R}^4$ と微分同相ではない．それは三つの V_i がすべて $\boldsymbol{R}^4$ に微分同相と仮定すると，次に述べるように矛盾が生ずるからである．この仮定から，$\boldsymbol{R}^4$ 内の十分大きな 3 次元球面と微分同相な S_i を，O_i の中で F_j を内部に含むようにとれる．この S_i の内部を M から取除き，4 次元円板 D^4 でふたをすると，C^∞ 級の滑らかな 4 次元単連結閉多様体 N が生ずる．N の交点形式は $E_8 \oplus E_8$ となるが，これは上述のようにドナルドソンの基本定理に反し矛盾である．

ドナルドソンの基本定理の証明の易しい部分は次の通りである．$r = \operatorname{rank} H_2(M, \boldsymbol{Z})$, $B = \{u \in H_2(M, \boldsymbol{Z}) \mid \Phi(u, u) = 1\}$ とおき，B の元の個数を $2n$ とし，$B = \{\pm x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とすると，$\Phi(x_i, x_j) \in \boldsymbol{Z}$ で，シュワルツの不等式から，$|\Phi(x_i, x_j)| < 1 \, (i \neq j)$ だから，$\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ は正規直交系である．従って特に $n \leq r$ である．そこでいま不等式

$$n \geq r \tag{6.8}$$

が証明されたとすれば，$n=r$ であり，$\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ は $H_2(M, \boldsymbol{Z})$ の正規直交基底となるから，任意の $u\in H_2(M, \boldsymbol{Z})$ に対して，$u=\sum_{i=1}^{n}\Phi(u, x_i)x_i$, $u_i=\Phi(u, x_i)\in\boldsymbol{Z}$ となる．従って $\{x_i\}$ は $H_2(M, \boldsymbol{Z})$ の $\boldsymbol{Z}$ 基底で，$\Phi(u, u)=\sum_{i=1}^{n}u_j^2$ となり，ドナルドソンの基本定理が証明される．残る (6.8) の証明のために，複素射影平面 $P^2(\boldsymbol{C})$ の n 個の直和 Y を考える．ただし n 個の内 p 個には標準的な向きをつけ，残りの $q=n-p$ 個には逆の向きをつけるものとする．このときドナルドソンは，次の (6.9) が成立つことを証明した．

$$M \text{ はこの } Y \text{ と向きづけ同境である．} \tag{6.9}$$

この (6.9) が証明されると，向きづけ同境な二つの多様体の符号数は等しいから，

$$r=\mathrm{sign}M=\mathrm{sign}Y=p-q\leq p\leq n$$

となり，(6.8) が証明される．

従って基本定理の証明の中心部分は，(6.9) の証明である．(6.9) を証明するために，ドナルドソンは，M 上のヤン・ミルズ方程式の解のモヂュライ空間を用いて，M をバウンドする，特異点付きの 5 次元多様体を解析的に構成することに成功したのである．このドナルドソンの仕事 (彼の学位論文) は，その結果の重要さと，方法の尖鋭さで際立ったものとなっている．

6.6　有限単純群の分類

1981 年 1 月に，長い間懸案となっていた有限単純群の分類が完成したとの公式発表があった．すなわち次の定理が証明されたのである．

有限単純群の分類定理

任意の有限単純群は，次の四種の群の内の一つと同型である．

I　素数位数の巡回群

II　n 次交代群 $(n\geq 5)$

III　リー型の有限単純群

IV　26 個の散在有限単純群.

これは多くの専門家の仕事を総合して得られた結果であり，この定理の証明に用いられた結果を記した論文を全部合わせると数千ページになると言われている．現存する数学の定理の内で，最も証明の長い定理と言える．III の分類でリー群 (環)，代数群の理論を用いた外は，すべて有限群論内部で理論を追求することによって，この結果が得られたのである．20 世紀数学では，分野間の交流や物理学からの刺

激が大きな役割を果しているが，このように自給自足の分野もあるので，代表として取上げた．

群 G は，G と $\{1\}$ 以外の正規部分群を持たないとき，単純であるという．これは既にガロアが知っていた概念である．そして上の定理における，I,II のタイプの群が単純であることも古くから知られていた．単純群は群を構成する原子と考えられる．そのことは，ヘルダーが剰余群と組成列をはっきりと定義したとき明確になったのであるが，もっと古くから実質的にそのように考えられていたと思われる．ただ，今世紀前半までは，有限単純群を数え上げることができると考えた人はいなかったようである．

一方 1888 年 - 94 年に行われた，キリングと E. カルタンの研究によって，複素単純リー群 (環) は完全に数え上げられることが証明されたのであった．即ちそれは

$$A_n\,(n \geq 1), \qquad B_n\,(n \geq 2), \qquad C_n\,(n \geq 3), \qquad D_n\,(n \geq 4) \tag{6.10}$$

という四つの無限系列と，孤立した 5 個の群 (例外リー群)

$$E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2 \tag{6.11}$$

から成ることが示されたのである．具体的には，A_n, B_n, C_n, D_n はそれぞれ典型群 (classical groups)

$$SL(n+1, \boldsymbol{C}), \qquad SO(2n+1, \boldsymbol{C}), \qquad S_p(2n, \boldsymbol{C}), \qquad SO(2n, \boldsymbol{C}) \tag{6.12}$$

を中心で割った群である．

1913 年にカルタンは，実単純リー群も分類した．それは複素単純リー群を実リー群と考えたものか，その実形である．後者の例として，$SO(n, \boldsymbol{C})$ の実形 $SO(p, n-p, \boldsymbol{R})$ (符号定数 $(p, n-p)$ の実 2 次形式の直交群) の単位元成分や，$SL(n, \boldsymbol{C})$ の実形 $SL(n, \boldsymbol{R})$,$SU(p, n-p)$ などを中心で割つ群がある．

さて 1900 年に出版された『線型群』の中で，ディクソンはこれらの典型単純リー群 (代数群でもある) の類似を，q 個の元から成る有限体 $\boldsymbol{F}_q$ の上で考えた．そしてこのような有限体上の典型群の交換子群を中心で割った群は，ごく少数の例外を除き単純群であることをディクソンは証明した．また彼は G_2 型例外リー群の類似を有限体上で考え，やはり有限単純群を得た．こうして冒頭の分類定理の III に属する群の多くをディクソンは発見したのであった．

また分類定理の IV に入る群としては，フランスのマチウが 1861 年に 5 個の次数 11, 12, 22, 23, 24 の多重可遷置換群 $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ を発見していた．その単純性は，ミラーによって 1900 年に証明された．これがマチウ群と呼ばれるものである．

今世紀初めに知られていた有限単純群は，これだけである．今世紀前半の 50 年間には，新しい有限単純群は一つも発見されなかった．後半になると新しい動き

が始まる．1955 年来日中のシュヴァレーは，各複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ と任意の体 k に対し，k 上の線型群 $\mathfrak{g}(k)$ を具体的に構成し，四つの例外を除き $\mathfrak{g}(k)$ は単純群であることを示した．これを $\mathfrak{g}$ に対する k 上のシュヴァレー群という．特に k として有限体 $\boldsymbol{F}_q$ を取るとき，q をパラメタとする有限単純群の無限系列が得られる．特に G_2 以外の例外リー群に対し，新しく四つの単純群の系列が得られた．ただし有限シュヴァレー群は，ディクソンの作った群の内ユニタリ群などを含まない．一般に $\mathfrak{g}$ に対応するルート系のディンキン図形の対称変換 θ から，シュヴァレー群 $\mathfrak{g}(k)$ の自己同型写像 α が生ずる．一方体 k の任意の自己同型写像 σ から $\mathfrak{g}(k)$ の自己同型写像が生ずるから，それをまた σ と記すと $\sigma\alpha = \alpha\sigma$ である．いま $\mathfrak{g} = A_n (n \geq 2), D_n, E_6$ とするとき，ディンキン図形の対称変換 $\theta \neq 1$ が存在する．θ の位数 n は，D_4 に対しては $n = 3$ のものがあり，他の場合は $n = 2$ である．このとき $\sigma^n = 1$ となる体の自己同型 σ があれば，$\tau = \alpha\sigma$ も位数 n の $\mathfrak{g}(k)$ の自己同型で，τ の不変元全体の作る $\mathfrak{g}(k)$ の部分群 ${}^n\mathfrak{g}(k)$ は一つの例外を除き単純群である．${}^n\mathfrak{g}(k)$ をシュタインバーグ群という．射影特殊ユニタリ群 $PSU_n(q^2)$ は，$k = \boldsymbol{F}_{q^2}$ の上の A_{n-1} 型のシュタインバーグ群である．有限体 $\boldsymbol{F}_q$ 上の $2n$ 次元線型空間上の非退化 2 次形式としては，指数 n のものと $n-1$ のものの二種があり，それぞれの直交群をディクソンは，$O_{2n}^+(q), O_{2n}^-(q)$ と記した．$O_{2n}^+(q)$ がシュヴァレー群，$O_{2n}^-(q)$ がシュタインバーグ群である．$\mathfrak{g} = B_2, F_4, G_2$ の場合には，ルートに長短 2 種があるので，ディキン図形は対称でないが，体 $K = \boldsymbol{F}_q$ の標数 $2(B_2, F_4)$ または $3(G_2)$ のときは，上と同様に $g(k)$ の位数 2 の自己同型 τ が構成できて，$q \geq 4$ のときはやはり，単純群 ${}^2\mathfrak{g}(k)$ が生ずる．これをリー (Ree) の群という．以前に鈴木通夫が二重可遷群の研究中に発見した単純群 $S_z(2^{2n+1})$ は，${}^2B_2(2^{2n+1})$ であることがわかった．

これらの研究によって，ディクソンが始めて考えた有限体上の線型群としての単純群は，リー群 (環) の理論を用いて，1960 年代の初めまでには統一的に理解されるようになった．これによって分類定理の III の部分のリー (Lie) 型の群とは，シュヴァレー群，シュタインバーグ群，リーの群の総称であるとして，その内容が明確になった．なお交代群 A_5, A_6, A_8 は，あるシュヴァレー群と同型になる．従って分類定理の II と III の間には，三つの重複がある．これ以外には重複はない．

有限単純群の分類に対し，最初に重要な知見を発表し，この方面の研究をうながしたのは，R. ブラウアーである．

定理 (ブラウアー・ファウラー)　中心の位数が偶数の有限群 H を一つ与えたとき，偶数位数単純群であって，そのある位数 2 の元の中心化群が H と同型となるようなものは有限個しかない．

この定理は，単純群 G が，位数 2 の元の中心化群を与えることによって，殆んど定まってしまうことを示している．その具体的な例として次の定理をブラウアー

は挙げた．

定理 (ブラウアー)　有限単純群 G の位数 2 の元 t の中心化群 $C_G(t)$ が $GL(2, q)$ (q は奇素数羃) に同型ならば，G は $PSL(3, q)$ またはマチウ群 M_{11} ($q = 3$ のとき) に同型である．

これと同種の定理は，その後数多く発見され，有限単純群の構造について多くの情報をもたらした．上の定理で例外の場合としてマチウ群が登場する所に，この種の分類の複雑さの一端が現われている．見方を変えれば散在群の意義を示すとも言える．

1963 年に，ファイトとトムプスンは，バーンサイド予想を解決した．

定理 (ファイト・トムプスン)　任意の非可換有限単純群の位数は偶数である．奇数位数の群は可解である．

この定理により，任意の非可換単純群は，位数 2 の元を含むこと，上のブラウアー・ファウラーの定理にある「偶数位数の単純群」は「非可換有限単純群」としてよいことがわかる．

このファイト・トムプスンの定理は，その結論だけでなく，証明法においても重要な影響を及ぼした．この論文で，p^n ($p =$ 素数) 位数の部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ が重要な役割を演ずる．この $N_G(P)$ の形の群を p 局所部分群という．その最も重要な例は，位数 2 の元 t により $P = \{1, t\}$ となる場合で，このとき $N_G(P) = C_G(t)$ となる．単純群 G において，局所部分群達の状況を調べることは，以後の単純群研究の主要な方法となった．この方法を局所群解析という．

位数 2 の元の中心化群によって単純群を決定しようという方法の有効性は，この方法によって新しい単純群が発見されたことによっても確認された．リー (Ree) の群 ${}^2G_2(3^{2n+1}) = G^*$ の位数 2 の元 t の中心化群は，$C_{G^*}(t) = \{\pm 1\} \times PSL(2, 3^{2n+1})$ である．ヤンコは，有限単純群 G が可換な 2 シロウ部分群を持ち，位数 2 の元の中心化群が，$\{\pm 1\} \times PSL(2, q)$ と同型ならば，次の (a) (b) の内のどちらかであることを示した．

(a)　$q = 3^{2n+1}$,　$|G| = |G^*|$,

(b)　$q = 4$　または　5．

ヤンコは (b) で $q = 5$ の場合を調べた．始めこのような群 G はないと考え，その存在を仮定すると矛盾が生ずることを示そうとしたが，矛盾は生ぜず，G の形がだんだん具体的に明らかになって来たのであった．そして最後に，このような群 G は，ある二つの行列から生成される $GL(7, 11)$ の単純部分群で，位数が $|G| = 17,5560$ となるものとして実現されることをヤンコは発見した．

このヤンコの群 J_1 は，既知のどの単純群とも同型でなく，第 IV 類に入るものであることがわかった．これが 1964 年のことである (なお (a) の場合は $G \cong G^*$ となる)．

一旦こうして新しい単純群が見つかると，この方面の専門家は，一斉に新しい単純群の捜索に乗出した．そしてこれから十数年の間に合計 21 個の新しい有限単純群が発見されたのである．これらの群は，I, II, III 類の群と異なり，無限系列を作らないので，散在群 (sporadic groups) と呼ばれている．その中で最大の群は，フィッシャー等が予想し，グライエスが存在を証明したモンスターと呼ばれる群 F_1 で，位数が約 8×10^{53} という巨大な群である．それは $\boldsymbol{C}$ 上の 19,6884 次元の可換な非結合環の自己同型群の中に作られる．F_1 と楕円モヂュラー函数との間には興味ある関係が存在し，いろいろ研究されている．

以下では，有限単純群の分類定理の証明の大筋を辿って見よう．勿論証明に立入るわけではないから，出て来る述語の定義は書かないことにする．気になる読者は，すぐれた報告「鈴木通夫：有限単純群の分類」[23] を見られたい．

以下はこの報告の一部の要約である．これは結果を論理的に整理したものであるから，実際の証明がこの順序で実行されたわけではない．

分類定理の証明は，長い長い帰謬法によっている．いま分類定理に記されていない有限単純群が存在したと仮定して矛盾を導くのである．このような単純群の内に，位数最小のものが存在するから，それを (一つ) とって G とする．以下この最小反例 G が，どのような群でなければならぬかを，何度も場合分けをして調べて行くのである．可換な有限単純群は，素数位数のものしかないから，非可換単純群だけを考えればよく，G も非可換である．G の位数は偶数だから，G は位数 2 の元を含むが，実は G は位数 4 の非巡回群を含む (ブラウアー・鈴木)．

有限群 G に含まれる位数 4 の非巡回部分群の集合を，頂点の集合とするグラフを考え，頂点 A, B は交換子群 $[A, B] = \{1\}$ となるときのみ辺で結ばれるとする．このグラフが連結のとき，群 G を連結という．このとき最小反例 G は連結であることがわかる．

次に非可換有限単純群には，成分型，非成分型の二大別がある．交代群と奇標数の体上のリー型の群は成分型であり，標数 2 の体上のリー型の群は非成分型である．散在群には，成分型のものと非成分型のものとがある．そこで最小反例 G について，

(I)　G が成分型のとき，

(II)　G が非成分型のとき，

と場合分けをして考える．

(I)　G が成分型のとき．G の成分として準単純部分群 A が含まれるが，実はこのとき A は，標準成分という特別な条件 ($K = C_G(A)$ が tightly embedded，その他の条件) をみたすものとしてよい．標準成分 A を，その中心 $Z(A)$ で割った $S = A/Z(A)$ は単純群である．いま

(a)　中心化群 $K = C_G(A)$ が位数 4 の非巡回群を含む場合，

(b)　含まない場合，

の二つに分けて考える．(a) の場合には，G は交代群 $A_n(n \geq 9)$ または 5 個の散在群のどれかになり，従って既知の群となる．従って最小反例 G は (b) の場合になる．この場合 $K = C_G(A)$ の 2 シロウ群は巡回群となる．この場合 $S = A/Z(A)$ は既知の単純群なので，S を与えて G の構造を定める標準成分問題を解かなければならない．これは S が既知の単純群のどれかになる場合をすべて調べなければならないので，大変手数のかかる問題であったが，多数の専門家の研究を総合して答が得られた．それによると既知の S からは，既知の G しか生じないことが証明された．従って最小反例 G が成分型であるとすると矛盾が生ずることになる．そこで次に

(II)　G が非成分型であるとき，を考える．非成分型単純群 G の研究で重要なのは，トムプスンが導入した $e(G)$ という不変量である．$e(G)$ はリー型の群ではその階数に等しい．$e(G) \geq 3$ の非成分型の単純群は，同時に扱うことができるが，$e(G) = 1, 2$，の場合は別に調べなければならない．$e(G) = 1$ の場合はアッシュバッカーが，$e(G) = 2$ の場合はメイスンが分類に成功した．どちらも非常に面倒な仕事であったが，どちらの場合にも既知の単純群しか含まれないことがわかった．

そこで G を連結非成分型の有限単純群で，$e(G) \geq 3$ とすると，論理的に，次の三つの場合 (1)(2)(3) のいづれかになる．

(1)　G は奇素数位数の元 x を含み，中心化群 $C_G(x)$ は "標準型"

(2)　極大 2 局所部分群 M に対し，$Q = O_2(M)$ の可換部分群は皆巡回群．

(3)　いわゆる "uniqueness case"．

(1) の場合には，G は標数 2 の体上のリー型の群である．(2) の場合は，2 元体 $\boldsymbol{F}_2$ 上のリー型の群その他いくつかの場合に分れるが，どの場合でも G は既知の単純群であることがわかる．従って最小反例 G は (1)(2) の場合では有得ず，(3) の場合になる．所がこの場合 (3) の条件をみたす群 G は実際には存在しないことを，アッシュバッカーが証明したのである．従って (II) の場合にも，最小反例の存在は矛盾を導く．これで分類定理の証明ができたことになる．

6.7　リーマン予想

これまで 20 世紀数学の成果のいくつかを述べて来たが，この最後の節では，今世紀の数学がこれまで解決に成功しなかった問題を取上げよう．

リーマン予想とは，よく知られているように，次の命題が成立つという予想である：

リーマン予想「リーマンのゼータ函数の複素零点はすべて，実部 $= \dfrac{1}{2}$ である」

この予想がなぜ重要視されるのであろうか．

第一に，リーマン予想が正しければ，素数分布論における種々の量 (例えば x 以

下の素数の個数と，そのよい近似値である積分対数 $\mathrm{li}(x)$ の差 $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$) の評価が飛躍的に改善されるからである．素数の分布がゼータの複素零点の分布状態によって規定されていることを，リーマンは明示公式によって示した．このリーマンの思想を，さらに一歩進めたものがリーマン予想なのである．

第二には，リーマンのゼータ函数は，数多くの数論的なゼータ函数，L 函数の代表的な存在であり，リーマン・ゼータに対するリーマン予想が証明できたとすれば，その影響は広範囲に及ぶ．またディリクレの L 函数のジーゲルの零点 (実軸上にあるかも知れない零点) のようにリーマン・ゼータと事情の異なる部分がどうなるかも興味ある問題である．

第三の理由としては，1970 年代以降，散乱理論，保型函数論，函数空間論等の種々の数学分野において，リーマン予想と同値な命題，それを導く命題が発見されたことが挙げられる．こうして現在では，リーマン予想は，素数分布論だけに関した命題ではなく，解析学の種々の分野に関係することがわかって来たのである．

リーマン予想が興味を持たれる最後の理由は，それが難しいからである．リーマンの論文 (1859 年) 以来 140 年近くたち，アダマールやフォン・マンゴルトによってリーマン論文の再検討が始ってからでも既に 100 年を経過した．この期間中ずっと問題にされながら，リーマン予想には近づくことすらできなかった．このことは，我々がゼータ函数や素数分布について，重要なある観点をまだ発見できていないことを強く示唆する．すぐれた研究者が何人も研究したにも拘らず気付かなかった観点があるとすれば，それは一体何であろうか．これは野心的な数学者を強く引きつける問題である．

話を具体的にするためには，ゼータ函数について若干の説明が必要であろう．御存知の方は飛ばして先へ進まれたい．素数論の習慣に従って複素変数を $s=\sigma+ti\,(\sigma,t\in\boldsymbol{R})$ と記す．リーマンのゼータ函数は，本来

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}},\qquad \mathrm{Re}\,s>1 \tag{6.13}$$

で定義される函数である．無限積はすべての素数にわたる積である．この無限積表示が，ゼータと素数分布を結ぶ根元的な関係である．つまりゼータ函数は素数を内蔵する母函数なのである．上の (6.13) 式の両辺は $\mathrm{Re}\,s>1$ で s について広義一様収束し，そこで s の正則函数を表わす．$\mathrm{Re}\,s\le 1$ では (6.13) の両辺は収束しないが，リーマンは全平面 $\boldsymbol{C}$ 上で，ゼータを表わす積分表示式を得て，$\zeta(s)$ は $\boldsymbol{C}$ 上有理型で，その唯一の極は $s=1$ における一位の極であることを見出した．さらに彼は

$$\zeta(-2n)=0,\qquad n=1,2,\cdots \tag{6.14}$$

であることも発見した．この $-2n$ の形の 0 点を ζ の自明な 0 点と呼ぶ．さらに

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) \tag{6.15}$$

とおくと，ζ の極 $s=1$ は $s-1$ で打消され，$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$ の極 $-2,-4,\cdots$ が ζ の自明な 0 点で打消されるから，$\xi(s)$ は $\boldsymbol{C}$ 上正則即ち整函数である．リーマンは $\xi(s)$ が

$$\xi(1-s) = \xi(s) \tag{6.16}$$

という函数等式をみたすことを証明した．また $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ は，0 点を持たない函数だから，(6.16) から次の (6.17) が成立つことがわかる．

$$\xi(s) \text{ の 0 点は, } \zeta(s) \text{ の自明でない 0 点と一致する.} \tag{6.17}$$

$\xi(s)$ は，実軸上の $\mathrm{Re}\, s > 1$ という部分で実数値をとるから，鏡像の原理により

$$\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)} \tag{6.18}$$

がすべての $s \in \boldsymbol{C}$ に対して成立つ．従って (6.16)(6.18) から次のことがわかる．

$$\begin{gathered}\xi(s) \text{ の 0 点 } (\zeta(s) \text{ の自明でない 0 点) は,} \\ \text{実軸及び直線 } \sigma = \frac{1}{2} \text{ に対して, 対称に分布する.}\end{gathered} \tag{6.19}$$

さらに (6.13) の無限積が $\sigma > 1$ で収束することから，$\zeta(s)$ は $\sigma > 1$ には 0 点を持たない．従って (6.16)(6.17)(6.19) から次のことが成立つ：

$$\begin{gathered}\xi(s) \text{ の 0 点 } (\zeta(s) \text{ の自明でない 0 点) は,} \\ \text{すべて帯状領域 } 0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1 \text{ 内にある.}\end{gathered} \tag{6.20}$$

次にリーマンは，ゼータの複素 0 点は無限個存在し，しかもその内で虚部が 0 と T の間にあるものの個数 $N(T)$ は，偏角の原理から

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log T - \frac{1}{2\pi}(1+\log 2\pi)T + O(\log T) \tag{6.21}$$

という漸近公式をみたすことを発見した．

リーマンは，このすぐ後の所で，リーマン予想を述べ，それが成立つことは,「極めて確らしい (sehr wahrscheinlich) と述べているが，その根拠には触れていない．

1896 年にアダマールとド・ラ・ヴァレー・プサンは，x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ が

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x \to +\infty) \tag{6.22}$$

という漸近公式をみたすことを証明した．(6.22) を素数定理という．彼等は二人共リーマンの研究を前提にして居り，ゼータ函数の諸性質を用いて (6.22) を証明したのである．本書の鹿野健「解析的数論の 100 年史から」に解説されているように，その中で本質的なのは，

$$\text{直線}\,\mathrm{Re}\,s = 1\,\text{上では},\zeta(s) \neq 0\,\text{である}. \tag{6.23}$$

という性質だけであった．ド・ラ・ヴァレー・プサンは，(6.23) の証明を少し拡張することによって，直線 $\mathrm{Re}\,s = 1$ の左側のある領域には，ゼータの 0 点が存在しないことを示すことに成功した．彼の発見したゼータの 0 点のない領域は，次の形のものであった：

$$s = \sigma + it, \quad \sigma > 1 - \frac{c}{\log|t|}, \quad |t| > |t_0|. \qquad (c,\,t_0\text{は定数} > 0) \tag{6.24}$$

そしてこの事実から，素数定理の誤差 $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ を上から評価できることを示した．彼の結果は次のように表わされる：

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x\exp(-a\sqrt{\log x})). \qquad (a > 0\text{ は定数}) \tag{6.25}$$

一方ゼータのあらゆる複素 0 点の実部の上限を Θ とおくとき，

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\Theta}\log x) \tag{6.26}$$

という評価式が成立つことがすぐわかる．従って特にリーマン予想が正しいと仮定すれば

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}}\log x) \tag{6.27}$$

となる．実は逆に (6.27) が成立てば，リーマン予想も成立つことも証明できる．

従って (6.27) は，リーマン予想と同値な素数分布論の命題である．$x \to +\infty$ のとき $x\exp(-a\sqrt{\log x})$ は x より少し小さい無限大で，$x^{\frac{1}{2}}\log x$ は $x^{\frac{1}{2}}$ より少し大きな無限大であり，$x^{\frac{1}{2}}\log x$ の方がずっと小さい無限大である．多くの数学者が，ゼータの 0 点のない領域を広げて，$\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ の上からの評価をより精密にしようと多大の努力を払った．現在最良の評価であるヴィノグラードフの結果は，三角和の精密な評価を用いたものであるが，結果は (6.25) を少し改良しただけで，(6.27) とは程遠い．

今日でもゼータの 0 点のない領域は，直線 $\mathrm{Re}\,s = 1$ に左側から漸近する曲線の左側という形のものしか知られて居ない．$\dfrac{1}{2} < \sigma < 1$ となる σ を 1 に近くとったとき $\sigma \leq \mathrm{Re}\,s < 1$ という領域に，ゼータの 0 点がないことを示すのは，リーマン予想と同程度に難しいと考えられている．

このようにゼータの 0 点を含まない領域を広くすることが難しいので，0 点が全くないというよりもう少し弱い形の命題で，その代り臨界領域 $0 \le \sigma \le 1$ 全体にわたるようなものが考えられた．

それは次の H. ボーア・ランダウの定理 (1914 年) である．いま $T > 0, \sigma > \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\operatorname{Re}\rho > \sigma, \qquad 0 < \operatorname{Im}\rho < T$$

をみたす，ゼータの 0 点の個数を $N(\sigma, T)$ とおく．このときボーア・ランダウは，$\displaystyle\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt$ の評価を用いて，

$$N(\sigma, T) = O(T) \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right) \tag{6.28}$$

であることを証明した．リーマンの公式 (6.21) では $N(T) \sim \dfrac{T}{2\pi}\log T$ であるのと比較すると，$N(\sigma, T)$ は $N(T)$ より低位の無限大である．すなわち直線 $\operatorname{Re}s = \dfrac{1}{2}$ から，少しでも離れると，0 点の密度はぐっと減るのである．これはゼータの 0 点の分布に関する数少い大局的定理の一つである．しかし (6.28) は，$N(\sigma, T)$ は $N(T)$ より無限大の位数が低いといっているだけで，$\operatorname{Re}s = \dfrac{1}{2}$ 以外に無限に多くのゼータの 0 点があってもよいのであるから，(6.28) は，リーマン予想よりずっとずっと弱い定理なのである．

そこで別の面からのアプローチとして，直線 $\operatorname{Re}s = \dfrac{1}{2}$ 上のゼータの 0 点の分布を考えて見よう．やはり 1914 年に，ハーディは 直線 $\operatorname{Re}s = \dfrac{1}{2}$ 上に実際無限に多くのゼータの 0 点が存在することを証明した．より定量的な研究として，線分

$$\operatorname{Re}s = \frac{1}{2} \qquad 0 \le \operatorname{Im}s \le T$$

上にあるゼータの 0 点の個数を $N_0(T)$ と記すとき，ハーディ・リトルウッドは，1921 年に，

$$N_0(T) \ge KT \qquad (K \text{ は定数 } > 0) \tag{6.29}$$

という不等式を証明した．そして 1942 年には，セルバーグは

$$N_0(T) \ge CT\log T, \qquad (C \text{ は定数 } > 0) \tag{6.30}$$

を証明した．リーマンの公式 (6.21) と比較すると，(6.30) はゼータの複素 0 点中，$\operatorname{Re}s = \dfrac{1}{2}$ 上にあるものが，正の割合を占めることを示している．さらに 1974 年には，レヴィンソンは，十分大きいすべての $T > 0$ に対して，

$$N_0(T) \ge AN(T), \qquad A = \frac{1}{3} \tag{6.31}$$

が成立つことを示した．さらにコンレイは (6.31) の A は $A=\dfrac{2}{5}$ にとれることを証明した．

これらは見事な成果であるけれども，この方向で評価を改良して行くことによりリーマン予想に到達できるとは考えられない．

最後に，ゼータの 0 点の数値計算の方から，リーマン予想を眺めて見よう．この数値計算では，具体的に計算するのは $\mathrm{Re}\, s=\dfrac{1}{2}$ という直線上のゼータの 0 点 $\dfrac{1}{2}+it$ を例えば $0\le t\le T$ の範囲で計算するのであるが，その時同時に帯状領域 $0\le\sigma\le 1,\ 0\le t\le T$ にあるゼータの 0 点はすべて直線 $\mathrm{Re}\, s=\dfrac{1}{2}$ 上にあることも確められるのである．このやり方はテュアリング (テュアリング・マシーンで有名な人) が最初に考え，ブレント [3] によって改良されたものである．

この方法を説明するため，必要な若干の用語を説明しよう．ゼータ函数 $\zeta(s)$ の複素 0 点は，$\xi(s)$ の 0 点と一致するから，後者で考える．いま $\Xi(t)=\xi\left(\dfrac{1}{2}+it\right)$ $(t\in\boldsymbol{R})$ の符号変化を調べるので，定符号の部分を分離する．

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)=r(t)Z(t),\qquad r(t)<0 \tag{6.32}$$

となる．ただしここで

$$r(t)=-\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\right|\varphi^{-\frac{1}{4}}\cdot 2^{-1}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)<0, \tag{6.33}$$

$$Z(t)=\exp(i\theta(t))\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \tag{6.34}$$

であり，

$$\theta(t)=\mathrm{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i\right)-\frac{t}{2}\log\pi \tag{6.35}$$

である．スターリングの公式によって

$$\theta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}+\cdots \tag{6.36}$$

と漸近展開される．$t\ge 7$ において $\theta(t)$ は狭義単調増加かつ連続で，$\theta(7)<-\pi$ である．従って各整数 $n\ge -1$ に対して，$\theta(g_n)=n\pi$ となる実数 $g_n\ge 7$ が唯一つ存在する．この g_n を第 n グラム点という．また区間 $I_n=[g_n,g_{n+1})$ を，第 n グラム区間という．次の命題 (6.37) を，“グラムの法則” という．

函数 $Z(t)$ は，各グラム区間に一つづつ 0 点を持つ．　　(6.37)

この “法則” には例外が多いが，例えばあるグラム区間に一つも 0 点のない時には，近くのグラム区間に 0 点を二個含むものがあるという具合で，現在計算されて

いる範囲では，平均すると丁度グラムの法則の述べているのと同数の 0 点がある．第 n グラム点 g_n は，$(-1)^n Z(g_n) > 0$ のとき，良いグラム点といい，そうでないとき悪いグラム点という．k 個の引き続くグラム区間の合併 $B_j = [g_j,\, g_{j+k})$ において，端の点 g_j と g_{j+k} は良いグラム点で，中間の $g_{j+1}, g_{j+2}, \cdots, g_{j+k-1}$ はすべて悪いグラム点であるとき，B_j を長さ k のグラム・ブロックという．これに対し，次の命題 (6.38) を，"ロッサーの規則" という：

$$\begin{gathered}\text{長さ } k \text{ のグラム・ブロック } B_j = [g_j,\, g_{j+k}) \text{ は，} \\ \text{少なくとも } k \text{ 個の } Z(t)\text{(即ちゼータ) の 0 点を含む．}\end{gathered} \tag{6.38}$$

これも成立たないことがあるが，そのような例外の個数は，グラムの法則の例外よりずっと少い．このとき次の定理が成立つ．

定理 (テュアリング・ブレント)　L 個の引続くグラム・ブロックがすべてロッサーの規則をみたし，かつその合併が区間 $[g_n,\, g_p)$ であるとする．いま L が不等式

$$L \geq 0.0061(\log g_p)^2 + 0.081 \log g_p \tag{6.39}$$

をみたすとすれば，次の不等式 (6.40) が成立つ：

$$N(g_n) \leq n+1, \qquad N(g_p) \geq p+1. \tag{6.40}$$

いまこの定理の仮定をみたすようなグラム・ブロックがあったとしよう．函数 $Z(t)$ (または $\Xi(t) = \xi\left(\dfrac{1}{3} + it\right)$) の値を，適当な刻み幅で数値計算し，$0 \leq \operatorname{Im} s \leq g_n$ という範囲で $n+1$ 回の符号変化があったとすれば，中間値の定理によって，

$$N_0(g_n) \geq n+1 \tag{6.41}$$

が成立つ．従って (6.40)(6.41) から

$$n+1 \leq N_0(g_n) \leq N(g_n) \leq n+1$$

となるから，

$$N_0(g_n) = N(g_n) = n+1 \tag{6.42}$$

が成立つ．これは $0 \leq \operatorname{Im} s \leq g_n$ という範囲では，リーマン予想が成立つということに外ならない．この方法で，ヴァン・デ・リューン等三人の研究者は，1986 年に，

$$0 \leq \operatorname{Im} s = t \leq 5,4543,9823.21 \tag{6.43}$$

という範囲に丁度 15 億+1 個のゼータの 0 点があり，それはすべて $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ 上にあることを確めた．15 億個の 0 点は，日常感覚では圧倒的な多数であるけれども，ゼー

タの理論や素数分布論では現象のスケールが極めて大きいため，15 億 $= 1.5 \times 10^9$ はごく小さな数と見なされる．実際広い範囲での 0 点の数値計算を進めて行くとき，例えばロッサーの規則からの逸脱がだんだん大きくなって行く傾向が観察される．また $S(T) = N(T) - \frac{1}{\pi}\theta(T) - 1$ という量は，有界でないことが証明されているが，現在計算されている範囲では常に，$|S(T)| < 3$ である．これらの事実から，現在までのゼータの 0 点の数値計算は，ゼータの挙動の複雑さを十分に示すだけ広範囲に行われているとは言えないことがわかる．従って (6.43) の範囲でリーマン予想が成立つという事実からは，リーマン予想の正しさについてはっきりとした結論を下すことは難しいのである．

なお上で (6.43) の範囲でリーマン予想が成立つことを確めるために用いた，テュアリング・ブレントの定理は経験的な性格を持っていることを注意しておこう．つまりこの定理の仮定をみたす L 個の引続くグラム・ブロックの存在は，別に理論的に保証されているわけではないのである．これまでの数値計算の範囲では，丁度この条件をみたすものがあったのであるが，いつもあるかどうかはわからない．

こうして数値計算から，計算した範囲ではリーマン予想が成立つことが確められたが，これからリーマン予想そのものの真偽について推測することは難しい．

こうしていろいろなアプローチのどれをとっても，リーマン予想からの帰結の一部は証明することができるが，それだけではリーマン予想の成立つ根拠としては弱いものであり，現時点でリーマン予想は正しいとは言い切れない．その正しさについては専門家の間でも意見が一致していないようである．ゼータ函数の専門家であったリトルウッドは，晩年に次のように述べている：

「リーマン予想は誤りではないかと思う．もしそうならば，計算によって誤りであることを立証できるかも知れない．ただしそのようなことができる見込は，ごく僅かであるけれども.」

こうして 20 世紀数学はリーマン予想を，問題として取上げながら，これ迄解決することができなかった．リーマン予想の真偽を定めるための重要な鍵を，20 世紀数学は未だ発見していないのではないかと思われる．

文献

[1] AMS ; A semicentennial history of the American Mathematical Society 1888-1938, 2 vols.,AMS,New York, 1938.

[2] AMS ; A Century of Mathematics in America, 3 vols, AMS, Providence, 1988.

[3] R.P.Brent ; On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip, Math.of Computations, 33(1979), 1361-1372.

[4] J.Dieudonné ; History of Functional Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[5] DMV ; Ein Jahrhundert Mathematik, Festscrift zum Jubiläum der DMV, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990.

[6] H.M.Edwards ; Riemann's Zeta Functions ; Academic Press, New York, 1974.

[7] D.Gorenstein ; The classification of finite simple groups, I. simple groups and local analysis, Bull AMS 1(1979), 43-199.

[8] D.Hilbert ; Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, Leipzig, 1912.
[9] J.P.Pier ed. ; Development of Mathematics 1900-1950, Birkhäuser, Basel, 1994.
[10] J.von Neumann ; Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.
[11] H.Weyl ; Gesammelte Abhandlungen 4 vols., Springer, Berlin, 1968.
[12] A.N.Whitehead and B.Russel ; Principia Mathematica, Cambridge University Press, 3 vols., 1910-1913.
[13] N.Wiener ; I am a mathematician, Doubleday & Co. 1956. 鎮目恭夫訳サイバネティックスはいかにして生れたか．みすず書房，1956.
[14] W. アスプレイ；ノイマンとコンピュータの起源，杉山滋郎・吉田晴代訳，産業図書，1995.
[15] 池田信行；確率過程論の誕生，現代数学のあゆみ 4 (1992), 113-126.
[16] 上野喜三雄；ソリトンがひらく新しい数学，岩波科学ライブラリー 4, 1993.
[17] 金子晃；超函数入門上, 下，東京大学出版会，1980, 1982.
[18] 鹿野健編著；リーマン予想，日本評論社，1991.
[19] 金容雲・金容局；韓国数学史，槙書店，1978.
[20] 今野浩；カーマーカー特許とソフトウェア　数学は特許になるか，中公新書，1995.
[21] L. シュワルツ；超函数の理論，岩村聯訳，岩波書店，1953.
[22] 数学セミナー；特集　岡潔，1996 年 3 月，日本評論社.
[23] 鈴木通夫；有限単純群の分類，数学 34 巻 3 号 (1982), 193-210.
[24] 銭宝琮編；中国数学史，川原秀城訳，みすず書房，1990.
[25] J. デュドネ編；数学史 1700-1900, I,II,III, 上野・金子・浪川・森田・山下訳，岩波書店，1985.
[26] A. パイス；神は老獪にして，アインシュタインの人と学問，西島和彦監訳，産業図書，1987.
[27] 飛田武幸；ブラウン運動，岩波書店，1975.
[28] 広重徹；物理学史 I,II，新物理シリーズ 5,6, 培風館，1968.
[29] 広瀬健・横田一正；ゲーデルの世界，完全性定理と不完全性定理，海鳴社，1985.
[30] 古田幹雄；S.K.Donaldson 氏の業績，数学 39 巻 1 号 (1987), 16-25.
[31] K. プルチプラム；波動力学形成史，江沢洋訳・解説，みすず書房，1982.
[32] H. ポアンカレ，科学と方法，吉田洋一訳，岩波文庫，1953.
[33] 前原昭二；数学基礎論入門，基礎数学シリーズ 26，朝倉書店，1977.
[34] 松本幸夫；4 次元のトポロジー (増補版)，日本評論社，1991.
[35] C. リード；ヒルベルト，彌永健一訳，岩波書店，1972.
[36] 和達三樹；非線型波動，岩波講座現代の物理学 14, 1992.
[37] 「日本の数学 100 年史」編集委員会；日本の数学 100 年史．上, 下，岩波書店，1983, 84.
[38] S.Zdravkovska and P.L.Duren ed., Golden Years of Moscow-Mathematics, AMS, Providence, 1993.

この序章の内容については，笠原乾吉，松本幸夫の両氏から貴重な助言を頂いた．お二人に厚く御礼申し上げる．

第1章

20世紀代数幾何学
— 重複度と交点数をめぐって —

上野健爾

1.　交点数と重複度

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + l \end{cases} \tag{1.1}$$

を考えてみよう．これを解くには，2番目の式を最初の式に代入して得られる2次方程式

$$x^2 + (mx + l)^2 = 1$$

を解けばよい．この式は

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mlx + l^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

と書けるので，連立方程式 (1.1) の解として

$$x = \frac{-lm \pm \sqrt{(m^2 + 1) - l^2}}{m^2 + 1}, \qquad y = \frac{-lm^2 \pm m\sqrt{(m^2 + 1) - l^2}}{m^2 + 1} + l \quad (\text{複号同順}) \tag{1.3}$$

を得る．特に2次方程式 (1.2) が重根を持つとき，すなわち $m^2 + 1 - l^2 = 0$ のときは，(1.1) の解は1つしかないことになるが，これは，同じ解が2個重複したものと考えることができる．

ところで，連立方程式 (1.1) を円と直線の交点を求める問題として幾何的に考えることもできる (図1.1)．このとき，$m^2+1 = l^2$ のときは直線は円と接し，$m^2+1 > l^2$ のときは，直線は円と2点で交わっており，交点の座標は (1.3) で与えられる．しかしながら $m^2 + 1 < l^2$ のときは，円と直線とは交わらない．しかしながら，連立方程式 (1.1) は解 (1.3) を持っている．これは，$m^2 + 1 < l^2$ のときは解 (1.3) は実数の範囲を越えて，複素数 (虚数) になってしまい，図示できなくなってしまうことに起因する．

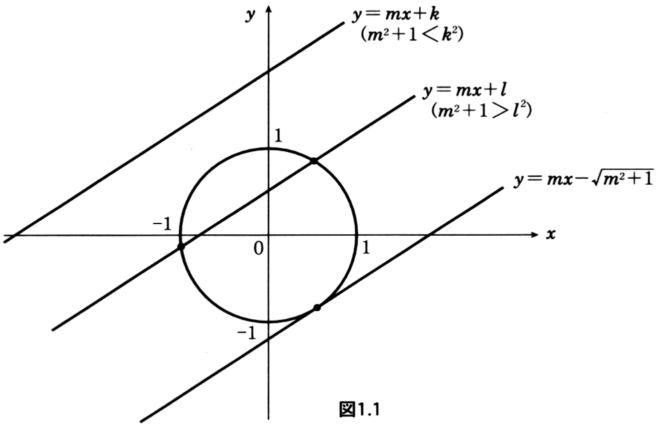


図1.1

連立方程式の解と図形の交点との関係は，このように一見複雑であるが，図形そのものも，座標 (x, y) を複素数まで拡張して考えることも可能である．そうすると，もはや，図 1.1 のように図形を平面に描くことはできなくなってしまうが，図形の交点と連立方程式の解との関係が明確になる．これは，複素数体 $\boldsymbol{C}$ が代数的閉体であるという性質に起因している．一般に，代数的閉体 k の元を係数とする連立方程式

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解くことは，$f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ が k 上の 2 次元アフィン空間 $\boldsymbol{A}_k^2 = k^2$ 内に定める図形の交点を求める問題として幾何学的に捉えることができる．これが，代数幾何学の立場である．

再び，連立方程式 (1.1) に戻ると，直線の式 $y = mx + l$ の係数 m, l が複素数であっても $m^2 + 1 \neq 0$ である限り解 (1.3) を得る．すなわち，$\boldsymbol{C}^2$ 内で式 $x^2 + y^2 = 1$ が定める複素円と式 $y = mx + l$ が定める複素直線は $m^2+1 \neq 0,\ m^2+1 \neq l^2$ である限り，必ず 2 点で交わり，$m^2+1 \neq 0,\ m^2+1 = l^2$ のときは 1 点で接すると見ることができる．$m^2+1 \neq 0,\ m^2+1 = l^2$ を満足する (m, l) は，$m'^2+1 \neq 0,\ m'^2+1 \neq l'^2$ を満足する (m', l') の極限として捉えることができるので，接する場合は交点で重複度 2 で交わっていると言うことがある．本来は相異なる 2 点であったものが，係数の関係で二重に一致してしまったわけである．

では，除外した $m^2 + 1 = 0$，すなわち $m = \pm i$ (i は虚数単位) では何が起こっているのであろうか．そのためには m を $\pm i$ に近づけて交点がどのように変わって行くかを見てみよう．簡単のため $m^2 + 1 = \varepsilon \neq 0$ となるように $m = \sqrt{1 - \varepsilon} i$

とおき $\varepsilon \to 0$ を考えることにする．このとき (1.3) は

$$x = \frac{-l\sqrt{1-\varepsilon}\,i \pm \sqrt{\varepsilon - l^2}}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{l(1-\varepsilon) \pm \sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{\varepsilon - l^2}\,i}{\varepsilon} + l \quad (\text{複号同順})$$

となり，$\varepsilon \to 0$ のとき $|x|, |y|$ とも無限大に発散してしまう．幾何学的に言えば，交点は $\varepsilon \to 0$ のとき，$\boldsymbol{C}^2$ の原点 $(0,0)$ からどんどん遠ざかってしまう．そこで，$m^2+1=0$ という例外をなくすために，複素射影平面 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ を考えることが必要になる．

2. 射影空間

$(a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)$ である複素数の 3 つ組の比 $a_0 : a_1 : a_2$ の全体を $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ と記し，複素射影平面という．また，比 $a_0 : a_1 : a_2$ が定める $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の元を $(a_0 : a_1 : a_2)$ と記し，複素射影平面の点という．定義より，$(a_0 : a_1 : a_2) = (b_0 : b_1 : b_2)$ であるためには

$$a_0 = \lambda b_0, \quad a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2 \tag{2.1}$$

を満たす複素数 $\lambda \neq 0$ が存在することが必要十分条件であることに注意する．

$$U_j = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C}) |\ a_j \neq 0\}$$

とおく．たとえば $(a_0 : a_1 : a_2) \in U_0$ であれば $a_0 \neq 0$ であり，したがって $(a_0 : a_1 : a_2) = \left(1 : \dfrac{a_1}{a_0} : \dfrac{a_2}{a_0}\right)$ である．これより，写像

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C}^2 & \longrightarrow & U_0 \\ (a, b) & \longmapsto & (1 : a : b) \end{array} \tag{2.2}$$

によって，$\boldsymbol{C}^2$ と U_0 とは 1 対 1 に対応することが分かる．全く同様の考え方で U_1, U_2 も $\boldsymbol{C}^2$ と 1 対 1 に対応することが分かる．$\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の点 $(a_0 : a_1 : a_2)$ の a_0, a_1, a_2 のいずれかは 0 でないので

$$\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C}) = \bigcup_{j=0}^{2} U_j$$

であることが分かる．すなわち，射影平面は 3 枚の複素アフィン平面 $\boldsymbol{C}^2$ を貼り合わせたものと考えることができる．しかし，ここでは前節の続きを考えるために，U_0 を前節で考えた複素アフィン平面 $\boldsymbol{C}^2$ と考えることにして

$$l_\infty = \{(0 : a_1 : a_2) \in \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})\}$$

とおき，これを $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の無限遠直線と呼ぶ．さて $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の斉次座標 $(x_0 : x_1 : x_2)$ を考えよう．座標とは言え，比だけが重要である．$U_0 = \boldsymbol{C}^2$ の座標 (x, y) とは，U_0 では $x_0 \neq 0$ であることと (2.2) より

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0} \tag{2.3}$$

と対応つけることができることが分かる．(x, y) を斉次座標に対してアフィン座標と呼ぶことにする．斉次座標を使えば，無限遠直線 l_∞ は式

$$x_0 = 0$$

で定義できることが分かる．連立方程式 (1.1) で出てきた直線の式 $y = mx + l$ は (2.3) を使うと

$$\frac{x_2}{x_0} = m \cdot \frac{x_1}{x_0} + l$$

と書け，両辺に x_0 をかけることによって

$$x_2 = mx_1 + lx_0 \tag{2.4}$$

と書くことができる．これが射影平面での直線の式である．式 (2.4) は $U_0 = \boldsymbol{C}^2$ では $y = mx + l$ で定まる複素直線を定めるが，無限遠直線 $l_\infty : x_0 = 0$ とも点 $(0 : 1 : m)$ で交わっている．この点は直線 $y = mx + l$ の傾きのみによって定まることに注意する．すなわち，$\boldsymbol{C}^2$ で平行な相異なる 2 直線

$$\begin{aligned} &y = mx + l \\ &y = mx + k, \quad l \neq k \end{aligned}$$

は射影平面 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ 上では無限遠点 $(0 : 1 : m)$ で交わる．

　ところで複素円 $x^2 + y^2 = 1$ は斉次座標を使うと (2.3) より

$$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$$

で定まる図形と考えられる．一般に m 次斉次式 $f(x_0, x_1, x_2)$ に対して $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ 内の図形

$$C_f = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C}) \mid f(a_0, a_1, a_2) = 0\} \tag{2.5}$$

を m 次平面曲線という．f が m 次斉次式であることから，$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^m f(x_0, x_1, x_2)$ となり，$(a_0 : a_1 : a_2) = (b_0 : b_1 : b_2)$ のとき (2.1) より $f(a_0, a_1, a_2) = \lambda^m f(b_0, b_1, b_2)$ となり $f(a_0, a_1, a_2) = 0$ となることと $f(b_0, b_1, b_2) = 0$ となることは同値であることが分かり，(2.5) が意味を持つことに注意しよう．

そこで，斉次座標を使って (1.1) の連立方程式を書き直すと

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0 \\ x_2 - mx_1 - lx_0 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

となり，$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ で定まる 2 次曲線 Q と $x_2 - mx_1 - lx_0 = 0$ で定まる直線 L (1 次曲線とはいわずに直線という) の交点を求める問題になる．このとき，(1.3) より，Q と L との交点は

$$\begin{aligned} &(m^2+1 \ : \ -lm + \sqrt{(m^2+1)-l^2}, m\sqrt{(m^2+1)-l^2}+l), \\ &(m^2+1 \ : \ -lm - \sqrt{(m^2+1)-l^2}, -m\sqrt{(m^2+1)-l^2}+l) \end{aligned} \tag{2.7}$$

の 2 点であることが分かる．ただし $m^2+1 = l^2$ のときはこの 2 点は一致して，重複度 2 の交点，すなわち接点となる．$m^2+1=0$ を除外する必要はなくなった．$m^2+1=0$ のときは Q と L との交点は無限遠直線上にある．

以上の考察は次のベズーの定理に一般化される．

定理 (ベズーの定理)　m 次斉次式 $f(x_0, x_1, x_2)$，n 次斉次式 $g(x_0, x_1, x_2)$ が 3 変数多項式環 $\boldsymbol{C}[x_0, x_1, x_2]$ の中で共通因子を持たなければ，m 次平面曲線 C_f と n 次平面曲線 C_g との交点の個数，すなわち交点数は各交点での重複度をこめて数えると mn に等しい．

この節の議論は複素数体 $\boldsymbol{C}$ のかわりに任意の代数的閉体上でできることを注意しておく．また，一般に $n+1$ 個の比 $a_0 : a_1 : \cdots : a_n$ の全体を考えることによって，n 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ が定義できることも容易に想像できるであろう．

3.　M. ネターの代数曲線論

19 世紀の数学の重要な成果の一つにリーマンによる代数函数論とアーベル函数論の建設があげられる．リーマンの代数函数論を代数曲線論として代数幾何学的に考察し，その後の代数幾何学の発展に大きく寄与したのはマックス・ネターであった．彼は，今日 M. ネターの基本定理と呼ばれる定理を理論の基礎づけに用いた ([NM])．M. ネターの基本定理は $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ 内の m 次平面曲線 $C : f(x_0, x_1, x_2) = 0$ と n 次平面曲線 $D : g(x_0, x_1, x_2) = 0$ のすべての交点を通る平面曲線 $E : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ が与えられたとき

$$F(x_0, x_1, x_2) = A(x_0, x_1, x_2)f(x_0, x_1, x_2) + B(x_0, x_1, x_2)g(x_0, x_1, x_2) \tag{3.1}$$

と書ける条件を問うものである．C と D とが各交点で重複度 1 で交わっているときは E が C と D とのすべての交点を通れば (3.1) が成り立つことは容易に示

すことができる．重要なのは C と D とが交点で接したり，交点が C や D の特異点で交わりの重複度が 2 以上になる場合である．M. ネターは興味深い考察を行なった．C と D の交点の一つを $(a_0 : a_1 : a_2)$ としよう．簡単のため $a_0 \neq 0$ とし $a = \dfrac{a_1}{a_0}, b = \dfrac{a_2}{a_0}$ とおこう．すなわち $(a_0 : a_1 : a_2) = (1 : a : b)$ とする．そこで

$$u = x - a = \frac{a_0x_1 - a_1x_0}{a_0x_0}$$
$$v = y - b = \frac{a_0x_2 - a_2x_0}{a_0x_0}$$

とおき，$x_0^{-m}f(x_0, x_1, x_2)$, $x_0^{-n}g(x_0, x_1, x_2)$, $x_0^{-l}F(x_0, x_1, x_2)$ (ただし F は次数 l の斉次式とする) を u, v の多項式として表示したものを $\tilde{f}(u, v)$, $\tilde{g}(u, v)$, $\tilde{F}(u, v)$ と記す．M. ネターが与えた条件は

$$\tilde{F}(u, v) = \tilde{A}(u, v)\tilde{f}(u, v) + \tilde{B}(u, v)\tilde{g}(u, v) \tag{3.2}$$

を満足する形式的ベキ級数 $\tilde{A}(u, v)$, $\tilde{B}(u, v)$ が存在するというものであった．この条件が C と D のすべての交点で成立すれば (3.1) が成り立つというのが M. ネターの基本定理である．

条件 (3.2) は形式的ベキ級数を使ったところに M. ネターの苦心があったが，もっと分かり易い条件を求めることが次の目標となり，可換環論が誕生する契機となった．C と D とがその交点で重複度が 2 以上で交わることを環論的にどのように捉えるかが問題となるわけである．

M. ネターはブリルの協力のもとに代数曲線論をリーマンの解析的な代数函数論とは独立に，代数幾何学の理論として確立した．

一方，19 世紀後半には，デデキントによって代数的整数環に対するイデアル論がつくられ，ヒルベルトは不変式論の研究を通してヒルベルトの基底定理，零点定理など多項式環に関する基本的な性質を明らかにしていた．こうした動きは，デデキント，ウェーバーによる代数函数論のイデアル論的取扱いを生み ([DW])，さらにヘンゼルによる付値論による代数的な代数函数論が建設され，有限体上での代数函数論を考えることが可能になった．後に E. アルティンは 2 次体の類似物として有限体上の超楕円函数体を考え，ゼータ函数の類似物として合同ゼータ函数を定義し，リーマン予想の類似が成り立つことを予想した ([A])．

一方，ヒルベルトの学生であったラスカーは多項式環のイデアル論を建設し ([La])，独立にマコレーも多項式環のイデアルに関する深い結果を得た ([Ma])．これらの結果は，1920 年代に，M. ネターの娘である E. ネターによってネター環の理論へと発展し，抽象代数学が誕生するとともに，代数幾何学の基礎づけのための大切な道具となった．

ところで，M. ネターの代数曲線論を代数曲面の場合へ拡張することは，カステルヌォーヴォ，エンリケス等のイタリア学派によって受けつがれ，1920 年代に代

数曲面の双有理的分類理論はひとまず完成した．しかしながら，当時は代数曲面論を展開するのに必要な数学的な道具は十分に発達しておらず，イタリア学派は数学的な道具のかわりに鋭い幾何学的直観によって代数曲面を扱った．彼らがほとんどの場合，正しい答えを得ていたことは賞讃に値するが，それ以上の発展は望むべくもなかった．1930 年代イタリアで研究を行なっていたザリスキーにエンリケスは「イタリア学派の代数幾何学は行きつくべき所に行きついてしまった．これからはトポロジーや抽象代数学を使うことが必要だ」と語ったと伝えられている．ザリスキーはイタリア学派の代数幾何を厳密な基礎の上に再建することを目標として 1940 年代に代数幾何学の厳密な基礎づけを可換環論を使って開始した．

4.　シューベルトの数え上げ幾何学

代数的対応の理論をもとに，幾何学的に興味深い結果を出しながら，その結果に不審の目が向けられたものにシューベルトの数え上げ幾何学がある ([Sc])．シューベルトの数え上げ幾何学の確固たる基礎づけを与えようとするセベリ，ファン・デア・ヴェルデンの努力によって，代数幾何学の新しい進展が始まった ([Se1],[Se2],[VW1],[VW2])

数え上げ幾何学はある性質を持った図形や点の個数を具体的に求める幾何学である．たとえば，楕円 C と C の外にある 1 点 P が与えられたとき，点 P から楕円 C への接線は 2 本引くことができる．このことを式を使って表現してみよう．楕円の式を簡単のため

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

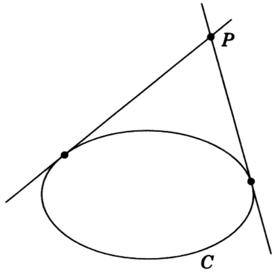


図4.1

とすると，これは複素射影平面 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ では

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-x_0^2=0 \tag{4.1}$$

と表示できる．また $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ での直線の式は

$$\xi_0x_0+\xi_1x_1+\xi_2x_2=0 \tag{4.2}$$

となるが，ξ_0,ξ_1,ξ_2 の比 $\xi_0:\xi_1:\xi_2$ で直線は定まる．したがって，$\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の点 $(\xi_0:\xi_1:\xi_2)$ と式 (4.2) で表わされる $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の直線とが 1 対 1 に対応することが分かる．これは射影平面 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ では点と直線とが双対の関係にあることを意味する．

さて，直線 (4.2) が点 $P=(\eta_0:\eta_1:\eta_2)$ を通る条件は

$$\xi_0\eta_0+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0 \tag{4.3}$$

で与えられる．一方，直線 (4.2) が楕円 (4.1) に接する条件は

$$a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2-\xi_0^2=0 \tag{4.4}$$

で与えられる．これは次のように考えると分かる．

(4.2) 式を座標 $x=\dfrac{x_1}{x_0},\ y=\dfrac{x_2}{x_0}$ で考え，簡単のため $\xi_2\neq 0$ と仮定すると，

$$y=mx+n,\quad m=-\frac{\xi_1}{\xi_2},\quad n=-\frac{\xi_0}{\xi_2} \tag{4.5}$$

となる．$y=mx+n$ が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に接する条件は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}(mx+n)^2=1$$

が重根を持つ条件

$$\frac{m^2n^2}{b^4}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)=0$$

で与えられる．これを整理すると

$$\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{a^2b^2}=0,$$

を得る．(4.5) を使って $(\xi_0:\xi_1:\xi_2)$ でこの式を書き直すと (4.4) を得る．

そこで2つの $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ を用意し，斉次座標をそれぞれ $(\xi_0:\xi_1:\xi_2)$，$(\eta_0:\eta_1:\eta_2)$ とする．直積集合 $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ に (4.3), (4.4) 式で定まる部分集合 V を考えてみよう．すなわち，V は連立方程式

$$\begin{cases} \xi_0\eta_0+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0 \\ a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2-\xi_0^2=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

を満足する点の組 $((\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2),(\beta_0:\beta_1:\beta_2))$ の全体である．今，点 $(\eta_0:\eta_1:\eta_2)=(\beta_0:\beta_1:\beta_2)$ を選ぶと，連立方程式 (4.6) は

$$\begin{cases} \beta_0\xi_0+\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2=0 \\ a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2-\xi_0^2=0 \end{cases} \tag{4.7}$$

となる．これは，$\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ での2次曲線と直線との交点を求める式となり，ベズーの定理より解は2つあることが分かる．これらの解が点 $(\beta_0:\beta_1:\beta_2)$ を通り楕円 (4.1) に接する直線を定める．すなわち $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$ が (4.7) の解である，言い換えると $((\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2),(\beta_0:\beta_1:\beta_2))\in V$ であれば

$$\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0$$

は点 $(\beta_0:\beta_1:\beta_2)$ を通り楕円 (4.1) に接する直線を与える．$a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2-\xi_0^2$ は $\boldsymbol{C}[\xi_0,\xi_1,\xi_2]$ の既約多項式であるので，どのような $(\beta_0:\beta_1:\beta_2)\in\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ を選んでも，ベズーの定理により (4.7) を満足する $(\xi_0:\xi_1:\xi_2)=(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$ は重複度をこめて2点であることが分かる．(4.7) の解が重複度2にある場合は図 4.1 で P が楕円 C に近づいて行った極限のとき，すなわち $(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2)$ が楕円 (4.1) 上の点である場合に限ることも分かる．

シューベルトの議論は上の議論の一般化になっている．ある性質を持った図形はある射影空間の直積 $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の中で $(\xi_0,\cdots,\xi_m)$，$(\eta_0,\cdots,\eta_n)$ に関してそれぞれ斉次である連立方程式

$$H_\lambda(\xi_0,\cdots,\xi_m,\eta_0,\cdots,\eta_n)=0 \qquad \lambda=1,2,\cdots,l \tag{4.8}$$

の解として与えられる．$(\eta_0:\cdots:\eta_n)$ が $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の一般の点のとき方程式 (4.8) が $(\xi_0:\cdots:\xi_n)$ に関して重複度もこめて N 個の解を持つとき，$(\eta_0:\cdots:\eta_n)$ を特別な点 $(\alpha_0:\cdots:\alpha_n)$ にとったとき (これは点 $(\alpha_0:\cdots:\alpha_n)$ に特殊化するという)，(4.8) を特殊化した連立方程式

$$H_\lambda(\xi_0,\cdots,\xi_m,\alpha_0,\cdots,\alpha_n)=0 \qquad \lambda=1,2,\cdots,l$$

は $(\xi_0:\cdots:\xi_m)$ に関してやはり重複度をこめて N 個解を持つというのがシューベルトが使った論法であった．しかし，この論法はいつも正しいわけではなく，(4.8)

が定める $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の部分集合 W の性質による．シューベルトの議論を正当化する過程で代数多様体の既約性や正規性の重要性が認識されるようになった．シューベルト ([Sc]) の主張のうち今なお証明できないものがあることを注意しておこう．これは，具体的に与えられた代数多様体が既約であるか否か判定するのは容易でないことに起因している．

5. 20 世紀代数幾何学

シューベルトの数え上げ幾何学を厳密に再構成する試みはセベリ ([Se1]) に始まった．そのためには，代数多様体の交わりの重複度を正しく定義する必要があった．またシューベルトの議論では一般の点を特別の点に特殊化する議論も含まれていた．こうした議論を可換環論を使って定式化することは E. ネターが試み，ファン・デア・ヴェルデンはそれをさらに押し進めて行った．ファン・デア・ヴェルデン ([VW3]) によれば，彼が一般の点 (生成点，generic point) の環論的な定義を記した論文を持ってオランダからゲッチンゲンの E. ネターを訪ねたところ，彼女はそれを雑誌 Mathematiche Annalen に受理してくれたが，実は彼女はゲッチンゲンで同じ結果について講義を前学期にしていたことを論文が印刷されたあと講義に出ていた数学者から知らされたとのことであった．このような E. ネターを中心とするゲッチンゲンの自由な雰囲気は 1933 年ヒットラーが政務を掌握すると一夜にして瓦解した．ユダヤ人であった E. ネターはアメリカへ亡命を余儀なくされた．E. ネターはアメリカでザリスキーに大きな影響を与えたがアメリカ滞在数年で亡くなってしまった．

一方ナチス支配下のドイツではビーベルバッハ達によって「ドイツ的数学」が唱えられ，すぐれた数学者が大学から追われて行った．有限体上の楕円曲線の合同ゼータ函数に関するリーマン予想を解いたハッセもこの運動に加担した．「ドイツ的数学」に関しては英国のハーディがこれを厳しく批判し，我が国では小倉金之助がいち早く反論を出している．物理でも相対論，量子力学をユダヤ人の物理学として排除し「ドイツ的物理学」が唱えられたが，こちらは実験結果もあってドイツ国内でたちまちのうちに粉砕されてしまった．数学は目に見えない対象を取り扱うだけに，ナチスドイツ時代の数学界と物理学界の違いは大変教訓的である．学問が時代の流れに擦り寄ると何が起こるか，一夜にして瓦解したゲッチンゲン数学教室の栄光は遂に戻ることはなかったことが如実に語ってくれる．しかしこれは過去の出来事ではない．我が国では，現在，数学を数理科学，数理学やさらに摩訶不思議な名前に言い換え，大学は社会が求める即戦力を養成する所と主張する動きが活発である．その行き着く所は学問の死，大学の死でしかない．

ナチス政権下でのドイツにとどまりナチスに反対しながらファン・デア・ヴェ

ルデンは代数幾何学の基礎づけを行ったが ([VW2])，正標数の体上での代数幾何学を含める形で重複度と交点数の理論はひとまず A. ヴェイユによって完成された ([W])．その後の代数幾何学の進展はめざましいものがあり，交点数と重複度についてもトポロジーからの影響も受けて，層の理論や K 理論を使ってさまざまな形で定式化されている．

参考文献

[A] Artin,E : Quadratische Körper der Gebiete der hören Kongruenzen, I, II, Math. Zeitschrift. **19**(1924),153-246.

[DW] Dedekind,R. & H.Weber : Theorie der algebraischen Funktionen einer Verändlichen J.Rein angew. Math. **92**(1882), 181-290.

[La] Lasker,E. : Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. **60**(1905), 20-116.

[Ma] Macaulay,F.S. : Algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts **19**,Cambridge Univ.Press, 1916.

[NM] Noether,M. : Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann. **6**(1873), 351-359.

[Sc] Schubert,H : Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig,1879.

[Se1] Severi, F : Sul principo della conservazione del numero, Rendiconti Circolo Mat. Palermo **33**(1912), 313-327.

[Se2] Severi, F : Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **9**(1933), 335-364.

[VW1] van der Waerden, B.L. : Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Ann. **97**(1927), 756-774.

[VW2] van der Waerden, B.L. : Zur algebraischen Geometrie 1 ~ 14. Math.Ann. **108**(1933), 113-125. ~ Math. Ann. **115**(1938),621-655.

[VW3] van der Waerden, B.L. : The foundation of algebraic geometry from Severi to Andre Weil, Archiv. History Exact Science **7**(1971),171-180.

[W] Weil, A. : Foundation of algebraic geometry, AMS.,1946.

第2章

20.5世紀における代数幾何の発展

小田忠雄

はじめに

代数幾何は20世紀において劇的な大発展を遂げた．関連分野から手法を広く吸収して強力な研究手段に育て上げるとともに理論を整備・発展させ，数々の大問題を解決するに至った(例えば[Deligne 1974]によるWeil予想の最終的解決，[Faltings 1983]によるMordell予想の解決，[Wiles 1995]によるFermat予想の解決，飯高・川又・[森 1988]等による高次元双有理幾何の発展等)．また，ソリトン・KP hierarchy理論，共形場理論，超弦理論，凸体の幾何，符号理論等の他分野との相互作用という予想外の事態にも立ち至ったのである．

これらの膨大な内容を紙数に限りある本稿で扱うのは不可能である．そこで，1950年代後半から1960年代の激変期に的を絞って振り返ることとしたい．この時期は数論の発展に関する佐武一郎氏の講演で19.5世紀と呼ばれた時期であるが，代数幾何の観点からはむしろ20.5世紀と呼ぶ方が相応しいと考える．この時期は，1970年代以降に数々の大きな成果が挙げられるための基盤が築かれた時期である．

Weilによる万有域(universal domain)，生成点(generic point)，特殊化(specialization)，位置(place)等を使った定式化や，Zariski, Chevalley, 永田，Serre等による環論的定式化を引き継いで，Grothendieckがこの20.5世紀に代数幾何を幾何学的に非常に自然な形で定式化した．極めて膨大な論文やセミナーノート[EGA], [FGA], [SGA]を舞台に展開し，徹底的に一般化したGrothendieckの手法は，時にはabstract nonsenseと呼ばれることもあったが，そのような一般化・抽象化は後になって予想外の豊かな実りをもたらすことになったのである．

1.　連立代数方程式系の環論的抽象化

さて，代数幾何とは**代数多様体**を研究する学問分野である．認識の仕方には時代とともに変遷があったが，代数多様体の本質は一貫して“連立代数方程式系の解の

全体” であり，それらの幾何学的性質の内で，座標変換 (あるいはもっと一般に双有理変換) で不変な本質的な性質を研究するのが代数幾何である．

n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式とは周知の通り

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

のようなものである．ここに $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ は非負整数の組の有限個を動き，$c_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ は**係数**と呼ばれる数である．

連立代数方程式系

$$(*) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

の解を考える訳であるが，解 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の各成分 a_j をどこで考えるか，あるいはそもそも $f_1, \ldots, f_s$ の係数はどこに属するのかが問題である．例えば有理数体 $\mathbf{Q}$ や複素数体 $\mathbf{C}$ のような係数体 k に係数が属し，解の各成分の取り得る値は k を含む代数閉体 Ω に属するものとするのが普通である． そこで

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_s) := \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega^n \colon f_1(a) = 0, f_2(a) = 0, \ldots f_s(a) = 0\}$$

を連立代数方程式系 $(*)$ の解の全体と考えることにしよう．

係数を k に持つ n 変数多項式全体の環 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の中で，$f_1, f_2, \ldots, f_s$ により生成されたイデアル

$$(f_1, f_2, \ldots, f_s) := \sum_{j=1}^{s} k[x_1, x_2, \ldots, x_n] f_j$$

を考え，剰余環

$$A = A(V) := k[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(f_1, f_2, \ldots, f_s)$$

を考える．$A(V)$ は “代数多様体 V 上の k 値多項式関数全体のなす環” であるが，実はそこには連立代数方程式系 $(*)$ の，座標変換等で不変な本質的性質が凝縮されているのである．佐藤幹夫氏の (もっと一般の微分方程式の場合まで込めた) “方程式は環である” との標語はその事情を簡潔に表している．

そもそも剰余環は，現代数学に特有のかなり高級な概念である．大学における数学教育でも，同値関係や商を標準カリキュラムとしてキッチリ学ぶのは，現在でも数学専攻の学生諸君に限られているようで，ベクトル空間の商空間すら一般理科系のための線形代数には現れない．

さて，連立代数方程式系 $(*)$ に代って剰余環 A を考えるお蔭で, 抽象代数的な取扱いが可能となる．変数 $x_1, \ldots, x_n$ や方程式 $f_1, \ldots, f_s$ を直接扱う具象代数から，一歩進んで抽象代数により本質に迫る．すなわち，“消去法が消去された” のである．[Eisenbud, §14.1] にもあるように，これは [Weil 1946] の序文にある表現であるが，これに関しては，Abhyankar が，1970 年の Nice における国際数学者会議での代数幾何の歴史に関する van der Waerden の講演を聞いて書いた詩がある．Mathematical Intelligencer 1972 年 9 月発行の第 3 号に発表された由である．(ただしこれは，1978 年に創刊された現在の雑誌ではなく，Springer-Verlag のパンフレットであった，いわゆる Old Intelligencer 時代のものであり，今となっては入手は容易でなかろう．) この詩が入手できなくとも，Abhyankar が具象代数を “高校代数” として尊ぶ様子は [Abhyankar 1975] で知ることが出来る．(この文献は，宮西正宜氏に御教示頂いた．)

ところが，面白いことに，時は巡りここ最近の 10 年になって具象代数が **Gröbner 基底の理論**という形で華々しく復活した．これは消去されたはずの消去法をも含む理論なのである．抽象化は，理論の定式化および展開に際しては重要な役割を果たすのであるが, 実例に対する具体的作業では，変数や方程式系の具体的形を知るのが不可避である．Gröbner 基底の理論は，各時点で好都合な変数や方程式系を選ぶアルゴリズムを与えるものと言えるが，コンピュータによる高速な数式処理が身近に使えるようになって現実的になり，今後も重要な役割を果たすものと思われる．

[広中 1964] の特異点解消定理では，Grothendieck によって導入されたスキーム理論の抽象的枠組みが不可欠であったが，実はその証明に際し，多変数巾級数環におけるイデアルの特別な生成系としての**標準基底**が導入され，重要な役割を果たしている．これは Gröbner 基底の巾級数版とでも言えるものであるが，広中平祐氏とほぼ同時期の 1964 年頃，広中氏とは独立に，W. Gröbner とその弟子である B. Buchberger により Gröbner 基底の理論が創始されたのは興味ある歴史的事実である．上述した Abhyankar の詩の最後の一行もこの点と考え合わせると極めて含蓄に富んでいる．(Gröbner 基底の歴史に関しては，例えば [Eisenbud §15.6] を参照して頂きたい．)

さて，話を元に戻そう．点 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega^n$ が方程式系 $(*)$ の解であるための必要充分条件は，各 x_j に a_j を代入することによって得られる環準同型 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to \Omega$ が，剰余環 A を通る合成準同型 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to A \to \Omega$ に分解出来ることである．このことから，$(*)$ の解全体のなす代数多様体は

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_s) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, \Omega)$$

と書けることになる．右辺は A から Ω への k 多元環としての準同型全体の集合である．

§2. で関手による定式化を行う都合上，代数多様体の間の多項式写像についても触れておこう．新たに m 変数の連立代数方程式系

$$\begin{cases} g_1(y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ g_2(y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ g_t(y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

を考え，その解の全体からなる代数多様体を $W := V(g_1, g_2, \ldots, g_t)$ とし，その上の k 値多項式関数環を $B := k[y_1, y_2, \ldots, y_m]/(g_1, g_2, \ldots, g_t)$ とする．各成分が多項式であるような写像 $\Omega^n \to \Omega^m$ によって写像 $V \to W$ が引き起こされるための必要充分条件は，k 多元環としての準同型 $k[y_1, y_2, \ldots, y_m] \to k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が剰余環の間の k 多元環準同型 $B \to A$ を引き起こすことである．その意味で，V から W への多項式写像全体 $\mathrm{Hom}(V, W)$ は k 多元環準同型全体 $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(B, A)$ と同一視出来る．ここで，矢印が逆転していることに注目して頂きたい．

2. スキームおよびその一般化

実は，上記のような連立方程式系の幾何学という起源を忘れ，全く一般に次のような定式化が可能である．すなわち，巾零元も許容するような一般の可換環 (ただし単位元を持つものに限定) A に対し，**アフィン・スキーム** (affine scheme) と呼ぶ “代数多様体”Spec(A) を対応させる． 詳細は省くが，Spec(A) は，A の素イデアル全体の集合に **Zariski 位相**と自然な**層**とを付与したものである (層については §3. 参照)．さらに，(単位元を保存する) 環準同型 $B \to A$ に対し，**射**と呼ぶ “多項式写像”Spec(A) $\to$ Spec(B) を対応させる．

このように，**物**と**射**とを組合わせたものを**カテゴリー**と呼ぶが，上記の対応により，可換環のカテゴリーとアフィン・スキームのカテゴリーとは矢印の向きが逆転するという意味も込めて**反同値**となる．この反同値によって可換環の環論的性質とアフィン・スキームの幾何学的性質とが完全に対応し，上野健爾氏の稿にもあるような代数幾何の従来の発展を総括するとともに，環論と代数幾何との間の豊かな相互作用を醸し出すのである．

Weil の代数幾何でも，アフィン多様体を “貼り合わせ” て抽象代数多様体を導入したが，上記のようなアフィン・スキームの場合も，貼り合わせにより一般の**スキーム** (scheme) を作る． その際に Zariski 位相と層とが不可欠なのであるが，詳細は省略する (層については §3. 参照)．

実は，代数幾何での考察の対象としては，スキームだけでは不充分であり，さらなる一般化が必要となる． そのために次のように考える．スキームとそれらの間の

射とからなるカテゴリーを (Schemes) と書き，一方，集合と写像とからなるカテゴリーを (Sets) と書くことにする．スキーム X, Y に対し $h_X(Y) := \mathrm{Hom}(Y, X)$ とすると，h_X は (Schemes) から (Sets) への，矢印を逆転させる意味での**反変関手**となる．対応 $X \mapsto h_X$ によりカテゴリーの観点から見て非常に良い“埋め込み”

$$(\mathrm{Schemes}) \hookrightarrow \mathrm{Functor}((\mathrm{Schemes})^\circ, (\mathrm{Sets}))$$

が得られるというのが**米田の補題**である．ただし，右辺は (Schemes) から (Sets) への反変関手全体のなすカテゴリーである．従って (Schemes) から (Sets) への反変関手はスキームの一般化と考えられるのである．スキームは可換環の一般化と考えても差し支えないことは前述したが，それよりもっと広い世界が開けるのである．

ここで §1. を振り返ってみると，連立代数方程式系には係数が特定されていた．環論的に言えば，連立代数方程式系から得られる可換環

$$A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(f_1, f_2, \ldots, f_s)$$

には，環準同型 $k \to A$ が指定され，従ってスキームの射 $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$ が指定されていたことになる．そこで，もっと一般にスキーム S を“係数スキーム”として固定し, スキームの射 $X \to S$ を S **上のスキーム**と考える．(これは，S をパラメータ空間とする代数多様体の族を想定している．) S 上のスキーム $Y \to S$ から $X \to S$ への射とは, スキームの射 $Y \to \mathrm{X}$ であって，合成 $Y \to X \to S$ が元の $Y \to S$ と一致するもののことである．$Y \to S$ から $X \to S$ への射全体を $\mathrm{Hom}_S(Y, X)$ と書く．

例えば，§1. における連立代数方程式系 (∗) から得られる環 $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ の Ω^n における解全体の集合は

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_s) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}(\Omega), \mathrm{Spec}(A))$$

となるのである．

上記のようにして，S 上のスキームのカテゴリー (Schemes/S) が考えられる．$h_X(Y) := \mathrm{Hom}_S(Y, X)$ とすれば，前述の場合と同様に，米田の補題により，対応 $(X \to S) \mapsto h_X$ を使って良い埋め込み

$$(\mathrm{Schemes}/S) \hookrightarrow \mathrm{Functor}((\mathrm{Schemes}/S)^\circ, (\mathrm{Sets}))$$

を得る．$\mathrm{Functor}((\mathrm{Schemes}/S)^\circ, (\mathrm{Sets}))$ に属するものの中で S 上の**代数空間** (algebraic space) と呼ばれるものが特に重要である．

上記のような定式化はあまりにも抽象的すぎて，何の役に立つかと思われるかもしれないが，例えば代数幾何におけるモジュライ (moduli) 問題と呼ばれる“分

類問題” を扱う際に不可欠であり，代数多様体の商多様体とも関連する ([Mumford 1965]，さらにはもっと最近の [Kollár]，[Keel・森] 参照)．ついでながら，非可換環に対してアフィン・スキームと類似の発想を適用したのが，数理物理において重要な役割を演じつつある量子群である．

3. Grothendieck 位相 — 空中浮揚する開集合

アフィン・スキームを貼り合わせてスキームを構成する際に，Zariski 位相と，それに関する層とが不可欠であることには §2. で言及した．

周知の通り，位相空間 X の位相は，X の開集合全体の集合 $(\mathrm{Opensets}_X)$ を特定することによって決まる．X の開集合 U, U' が，$U' \subset U$ の関係にあるとき U' から U への射が 1 本あると見なすことにより，$(\mathrm{Opensets}_X)$ をカテゴリーと考えることが出来るが，このカテゴリーから (Sets) への反変関手 F が X の上の**前層** (presheaf) と呼ばれるものである．すなわち，各開集合 U に対して集合 $F(U)$ を決め，また包含関係 $U' \subset U$ があるとき，次の規則を充たすような “制限写像” $F(U) \ni s \mapsto s_{|U'} \in F(U')$ を与えることである．すなわち，包含関係 $U'' \subset U' \subset U$ があるときに，制限写像の合成 $F(U) \to F(U') \to F(U'')$ が制限写像 $F(U) \to F(U'')$ と一致するという規則を充たすことである．

前層 F が**層** (sheaf) であるとは，どのような開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ に対しても，自然に得られる列

$$F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(U_i \cap U_j)$$

が**完全**となる時である．すなわち，各 $i \in I$ に対して $s_i \in F(U_i)$ が与えられたとき，唯一つの $s \in F(U)$ により $s_{|U_i} = s_i$ がすべての $i \in I$ に対して成り立つための必要充分条件は，“貼り合わせ可能条件” が成り立つこと，つまりすべての $i, j \in I$ に対して $s_{i|(U_i \cap U_j)} = s_{j|(U_i \cap U_j)}$ となることである．

層は，Leray により考え出され，多変数複素解析幾何において重要な役割を演じ，[Serre 1955] によって代数幾何に導入された概念であるが，Zariski 位相があまりにも弱い位相であるため，ある程度重要な役割を演じながらも今一つ力不足という難点があった．そこに登場したのが “開集合を空中浮揚” させて位相を強めるという **Grothendieck 位相**の驚くべき発想である．空間 X の “開集合” として，(ある程度の制限を充たす) 写像 $U \to X$ も許容しようと言う訳である．もはや U は X 内に部分集合として横たわっている必要はなく，X の頭上に浮揚していてもよいというのである．

スキーム X の Grothendieck 位相の場合に話を限れば，X 上のスキームのカテゴリー $(\mathrm{Schemes}/X)$ の一部分を “開集合” のカテゴリー $(\mathrm{Opensets}/X)$ として指

定する．例えばエタール位相と呼ばれる場合には，エタール射 $U \to X$ という"局所同型"に近い性質を持つ射のみを考慮の対象とするのである．

X 上の新しい意味での前層 F は (Opensets/X) から (Sets) への反変関手である．さらに，この新しい意味での"開集合"による"開被覆"$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ の意味も適当に明確にした上で，F が層であることを，列

$$F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(U_i \times_X U_j)$$

の完全性で定義する． ここで注目すべきことは，U_i, U_j はもはや X の部分集合とは限らないため，共通集合 $U_i \cap U_j$ を考える訳にはいかず，代りに**ファイバー積** $U_i \times_X U_j$ を使う点である．その定義はここでは述べないが，Functor((Schemes/X)°, (Sets)) の枠組みで容易に定義できる．

上述の定義によると，実は X 上のスキーム $Z \to X$ に対する h_Z も Grothendieck 位相に関する X 上の層と見なせてしまい，空間と層との区別も定かでなくなってしまう．詳細は述べないが，この現象が**トポス** (topos) 理論へと発展する．

そもそも Grothendieck が上述のエタール位相を導入したのは，Weil 予想 [Weil 1949] を解決するためであり，後に [Deligne 1974] によってその夢が実現したのであるが，興味深いことに，Grothendieck やその周辺の研究者達が上述のような一般化した位相や層さらにはトポスを代数幾何に導入しつつあったほぼ同時期の 1963 年頃に，数理論理および集合論においても F. W. Lawrence や P. Cohen によって同様の概念が導入され，現在もコンピュータ・サイエンス等で重要な役割を果たしつつある由である．(例えば [MacLane-Moerdijk] を参照して頂きたい．このことは田中俊一氏に御教示頂いた．)

ところで，日本語の"被覆"や英語の"covering"は数学的に異なる 2 通りの意味を持つ．ドイツ語では"Überdeckung"および"Überlagerung"とし，フランス語では"recouvrement"および"revêtement"と区別する異なった概念である．例えば $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ が開被覆であるという場合と，$Y \to X$ が不分岐被覆であるという場合との違いであるが，上述のように空中浮揚してしまった開集合では区別する必要がなくなってしまうのは不思議な偶然である．

関連文献

[Abhyankar 1975] S. S. Abhyankar, High-school algebra in algebraic geometry, Historia Math. 2 (1975).

[Deligne 1974] P. Deligne, La conjecture de Weil, Publ. Math. IHES 43 (1974).

[Eisenbud] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 150, Springer-Verlag, 1994.

[Faltings 1983] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. 73 (1983).

[FGA] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki (1957–1962).

[SGA] A. Grothendieck et al., Séminaire de la géométrie algébrique, (1960–1964)
[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments de la géométrie algébrique, Publ. Math. IHES 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967); Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag, (1971).
[広中 1964] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. 79 (1964).
[Keel・森] S. Keel and S. Mori, Quotients by groupoids, Ann. of Math. 145 (1997).
[Kollár] J. Kollár, Quotient spaces modulo algebraic group, Ann. of Math. 145 (1997).
[MacLane-Moerdijk] S. Mac Lane and I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory, Universitext, Springer-Verlag, 1992.
[森 1988] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988).
[Mumford 1965] D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, (1965).
[Serre 1955] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955).
[Weil 1946] A. Weil, Foundations of Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 29, (1946).
[Weil 1949] A. Weil, Number of solutions of equations over finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949).
[Wiles 1995] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Ann. of Math. 141 (1995); R. Taylor and A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, ibid.

第3章

Radon変換

吉沢尚明

序言

Radon変換は，幾何学と解析学とが融合した一つの原理である．本稿では，この理論の発生と展開を，三つの局面に分けて述べる．第一は1917年のJ.Radonの論文による誕生であり，第二は1960年前後の展開，そして第三は，技術におけるこの原理の応用の急激な発展である．**1**と**2**で第一の局面に関することを，また**3**で第二の局面を考察する．第三の局面は最も目覚ましいが，本稿では**4**として略記するにとどめる．なお，以上の本論を補う一つの課題を文末に付記した．

1. J.Radonの論文の基本定理群

論文の内容を基本定理と背景・課題の二つに分けて，それぞれ**1**と**2**で説明する．

1.1 論文全体の概略

原題は Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten—Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig , 69(1917) , 262-277[1] .

この論文の第1の部分で，平面上の函数のRadon変換の定義とその逆変換に関する定理群が証明されている．第2部分は，直線の函数を平面上の函数から決定する問題を扱い，第3部分では非ユークリッド平面等について類似の定理を考察している（第3部分は**2**で述べる)．

[1] 原題は次のような意味である：「与えられた曲線叢の各曲線に沿う積分値によって，函数を決定すること」．なお名古屋大学の数学教室に，Hilbertに贈呈された多数の別刷が“Hilbert 文庫”として整理・保管されている．この文庫にあるRadonの別刷を見ると，当時は印刷に相当な支障があったことが推察される．世界大戦の最中で，オーストリアは大きな影響を被っていたことであろう．

1.2 Radon 変換の定義

歴史の話を始める前に，Radon 自身が与えた定義を，現代数学の言葉を用いて，言い直しておきたい．こうすることで，高木貞治先生の「数学を知らなければ数学史は判らない」という注意に幾分かは沿ったつもりである[2)]．

Euclid 平面上で,(向きをつけない) 直線 g を，原点を通る垂線の長さと角度を用いて $g = g(r, \varphi)$ と表すと，すべての g の集合 G には座標 $(0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$ がはいるが，$g = (0, \varphi) = g(0, \varphi + \pi)$ だから，G は表裏のない 2 次元多様体である．こうして平面 E に対して，直線が作る空間という幾何学的対象 G が対応する．ここで次の定理 I が成立する：

(定理 I)　平面 E 上の積分有限な実数値函数 $f(P)$ に対して，直線 $g(r, \varphi)$ に沿う積分値 $\int_g f(P)\,ds$ を $\tilde{f}(r, \varphi)$ または $F(r, \varphi)$ と記す．これは直線の空間 G の上の函数として（測度 0 を除いて）確定する[3)]．

函数 $f(P)$ が作る函数空間を $\mathcal{F}$ と記し，$\tilde{f}(r, \varphi)$ の作る函数空間を $\tilde{\mathcal{F}}$ と記せば，定理 I で与えられる対応 R ： $f \to \tilde{f}$ は $\mathcal{F}$ から $\tilde{\mathcal{F}}$ の上への写像で，これを **Radon 変換**と呼ぶ．対応 $\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ は，前述の幾何学的対象の間の対応：$E \to G$ の “analytic version”（解析版）とでも言うべきものである．

1.3 反転公式

(定理 II)　円 $K(P, q)$ (中心 P, 半径 q) のすべての接線の集合は，G の閉曲線を作る．函数 $F(r, \varphi)$ のこの閉曲線上の平均値は次の様に表される：

$$\overline{F_P}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x\ \cos\varphi + y\ \sin\varphi + q,\ \varphi)\, d\varphi.$$

(定理 III)　f は F を用いて（Stieltjes 積分によって）次の様に表される：

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\overline{F_P}(q)}{q} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\overline{F_P}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\overline{F_P}(q)}{q^2}\, dq \right\}.$$

---

2) 高木先生は，次の趣旨のことを書いておられる —— 先生がある講義の中で歴史の話を付け加えたところ，聴講者の一人が，たいへん面白かったから，今度は数学史の講義をしてほしいと頼みに来たことがあった．先生は，こういう人には，次のように言って断ったらどうだろうか，とおっしゃる：「ある人がいつも刺身に山葵を付けないで食べていた．(たぶん，山葵には栄養がないとかいうような理屈からであろう．) ところが一度山葵を付けてみると，意外に旨かった．今度は山葵だけ食ったら，どんなに旨いだろうか.」

3) Radon は，連続函数 $f(x, y)$ は次の条件を満たすとして，丁寧な計算をしているが，これらの条件の表現には必然性がないから，以下では省略する．

(条件 1) (i)　$\iint_E \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy < \infty$；　(ii)　$P = (x, y)$ と $r \ge 0$ に対して

$\bar{f}_P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + r\cos\varphi, y + \sin\varphi)\, d\varphi$ とおくと $\lim_{r \to \infty} \bar{f}_P(r) = 0$.

zu bestimmen. Minkowski hat diese Aufgabe im Prinzip zuerst behandelt[1]) und durch Entwicklung nach Kugelfunktionen gelöst; P. Funk hat später die Minkowskische Lösung durchgeführt und gezeigt, wie man die Lösung mit Hilfe der Abelschen Integralgleichung finden kann[2]) und dieser Methode verdanke auch ich die Lösung des Problems A. Die Funksche Lösung ist ganz analog zu (III), nur tritt in den Nenner der Sinus des sphärischen Radius und additiv zu dem Integral der Wert von F im ~~Pole des~~ betreffenden Großkreise~~s~~ dividiert durch π. Aber auch in der hyperbolischen Ebene hat die gestellte Aufgabe die zu (III) analoge Lösung:

$$f(P) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\,F_P(q)}{\mathfrak{Sin}\, q}$$

(es ist hier das Krümmungsmaß $= -1$ angenommen), wie sich ganz konform zu der in 1. angedeuteten Ableitung von (III) zeigen läßt.

In beiden Fällen kann man auch die zu B. analoge Frage stellen. In der elliptischen Geometrie erhält man vermöge der absoluten Polarität nichts Neues, im hyperbolischen Falle ~~scheint~~ eine zu (V) analoge Lösung. ~~nicht zu~~ existieren.

Eine zweite Spezialisierung ergibt sich, wenn man (in der euklidischen oder nichteuklidischen Geometrie) als Kurven C die Kreise mit konstantem Radius nimmt. Hier kann man auf der Kugel die Minkowskische Behandlung mit Kugelfunktionen anwenden und die Aufgabe in gewissem Grade lösen. Interessant ist in diesem Falle, daß die Eindeutigkeit der Lösung verloren gehen kann; es gibt nämlich für gewisse, durch die Nullstellen der Legendreschen Polynome gerader Ordnung definierte Radien ϱ gerade Funktionen auf der Kugel, die längs jedes Kreises vom sphärischen Radius ϱ integriert, Null ergeben, ohne identisch zu verschwinden. Im euklidischen Falle tritt an Stelle der Kugelfunktionenreihen das Integraltheorem der Besselfunktionen; hier gibt es stets Funktionen, die über alle Kreise von festem Radius integriert, Null geben und doch nicht identisch verschwinden; ist der Radius 1, so sind es (in Polarkoordinaten ϱ, φ) die Funktionen

$$J_n(x_\nu \varrho)\cos n\varphi, \quad J_n(x_\nu \varrho)\sin n\varphi,$$

und ihre Linearkombinationen, wo x_ν eine Nullstelle von J_0 ist. Im hyperbolischen Falle treten an Stelle der Besselfunktionen die

1) Ges. Abh., Bd. II, S. 277 f. 2) Math. Ann., Bd. 74, S. 283—288.

定理 II と定理 III を併せて，Radon 変換 R の逆変換を表す“反転公式”が得られる.

1.4　反転公式の証明について

(1)　平均値 $\overline{f_P}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)\,d\varphi$ (脚注 3 の条件 1 の式) を用いて，定理 II から（原点 O に対して）等式 $\overline{F_O}(q) = 2\displaystyle\int_q^{\infty} \dfrac{\overline{f_O}(r)r\,dr}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ が得られる．ここで $r^2 = v, q^2 = u$ と置いた式が，Abel の積分方程式と呼ばれる有名な次の式である：

$$\overline{F_O}(\sqrt{u}) = \int_{\sqrt{u}}^{\infty} \frac{\overline{f_O}(\sqrt{v})}{\sqrt{v-u}}\,dv.$$

これを用いれば，$\overline{f_O}$ は $\overline{F_O}$ によって表される.

(2)　以上のことを注意した上で Radon は,「 $f(P)$ が（原点 O のまわりで）回転対称ならば Abel の積分方程式によって定理 III が得られるが，対称でない場合にはこの方法による証明は困難であると思われる」と述べて，一般の場合を，2 重積分の変数変換を用いて証明している.

(3)　反転公式の Radon 以後の証明には，Hilbert 変換や Mellin 変換によるもの等，種々の方法があるが，判り易いのは“Dirac の超函数” $\delta(x)$ を用いる方法であろう．この項に挙げた種々の方法は，実質的には同種のものである[4]．Abel 自身の積分方程式についての論文（1826 年）は，分数冪の微分作用素を用いている.

1.5　逆問題

次の様な問題を Radon 変換の逆問題と呼ぶことにする：直線の空間 G の上の函数 $\Phi(r,\varphi)$ が与えられた時に，これが平面 E 上の何らかの函数 $f(P)$ の Radon 変換となるための (Φ についての) 充分条件を求めること．これについては，順問題 (定理 I,II,III) と同様の思想で，次の様な形で一応の解決が与えられている[5]．

(定理 IV)　直線函数 $\Phi(r,\varphi)$ (脚注 3 に述べたことから条件は省略する) から，$f(P)$ を構成し，続いて F を構成すると $F(r,\varphi) = \Phi(r,\varphi)$，かつ $f(P)$ は一意的に決まる.

---

[4] I. Gelfand 達の『超函数論』(第 1 巻) は，$\delta(x)$ によって，これらの定理を系統的に導いている.
[5] 応用 (4) には逆問題の方が重要であるが，ここで展開されている方法では，それには不充分である.

1.6 双対的問題

論文の第 2 部分で，(定理 V と定理 VI として) 上述の Radon 変換論と“双対的な (dual)” 理論が展開されているが[6]，定理 V の趣旨だけ述べておく．まず，直線函数 $\Phi(r,\varphi)$ に対して，次の函数を Φ の**点平均値**と呼ぶ：

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Phi(x\cos\varphi+y\sin\varphi,\varphi)\,d\varphi.$$

(定理 V)　直線函数 $\Phi(r,\varphi)$ の原点の値は，点平均値を用いて次の様に表される：

$$\Phi(0,0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{\infty}v_x(x,y)\,dy,\qquad (\text{変数}\,x\,\text{の積分は Cauchy の主値を表す}).$$

2. Radon の論文の背景と課題

2.1 Newton potential との関係

研究を始めた頃のことを，Radon 自身が以下の様に回想している．Radon の問題と Newton potential の理論とが関係する可能性を，W.Blaschke が指摘した．即ち，Radon 変換 $F=\mathsf{R}f$ から点平均値 v を定義する操作 (項 1.6) を $v=BF$ と記し，$v=B\circ\mathsf{R}f=Hf$ と書き直すと Hf は，平面 E 上の密度 $\pi^{-1}f(P)$ をもつ Newton potential と見ることが出来る．このことから，H の逆変換が次の形で得られる：

$$f(P)=H^{-1}v=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\overline{v_P}(r)}{r}=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta v(x',y')}{r_{PP'}}\,dx'\,dy',$$

ここで $\overline{v_P}(r)$ は定理 II の様に定義されたもので，Δ は Laplacian である．これを見ると，Radon の諸定理を ($\mathsf{R}^{-1}=H^{-1}B, B^{-1}=\mathsf{R}H^{-1}$ を用いて) 導くことが出来そうであるが，事実，定理 IV は，はじめはこの方法で証明したのだそうである．しかし厳密な証明は，この方法より容易な直接的方法によったと言う．

この回想によると，Radon 変換と Newton potential との関連の研究が目標であったと思われる．このような課題について Radon 自身は発表しなかったが，この論文の目標についてはその後研究が発展した (本稿の **3** と **4** でその一端を述べる)．

---

[6] dual あるいは duality は，一つのものの両面性を表すことが元の意味であるが，物理学や数学で種々の場合に使われている．例えば一つの双一次形式から二つの線型空間を導いたときに，それらは dual であるという．量子力学では，今世紀初頭の光の duality (粒子性と波動性) が有名である．上文で Radon が dual と言っているのも，二つの定理群の間に対応が存在するという現象である．

2.2 多様化

(1) Radon は問題の一般的設定を次の様に述べている（これは正しい見通しであった）: 弧長の微分 ds が定義されている曲面 S に，($g(r,\varphi)$ のように) 2 つの連続パラメータをもつ曲線叢が与えられているとき，S 上の函数 $f(x)$ を，それらの曲線 C の上の積分値 $\int_C f\,ds$ によって決定すること[7)]．

(2) この一般的課題の特殊化として，次の場合が挙げられている．

(a) S が 2 次元楕円幾何の場合は，問題を球面に帰着し，C を大円とする —— Radon より前に，(定理 III に相当する)「球面上の函数が，大円上の積分値で決まる」ことを，Minkowski が球函数を用いて証明し，続いて P.Funk が Abel の積分方程式を用いて解を表示した．これらを参考にしたと Radon は述べている．これらの他にも，Radon に間接の影響を与えたかも知れないものがあるが，それは（20 世紀よりもむしろ）近世数学史の課題であるので，本稿では立ち入らない．

(b) S が 2 次元非 Euclid 幾何，C がその直線の場合 —— 定理 III に相当するものは次の形になると言っている：

$$f(P) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\overline{F_P}(q)}{\sinh q}.$$

またこのあたりのページには，種々の特殊函数，特に球函数や Bessel 函数と並んで，若き H.Weyl の Kegelfunktion（円錐函数）が現れている (**3** を参照)．

(3) 定理 V については，Radon は「非 Euclid 平面では定理 V と類似の解は存在しない様である」と印刷していたが，(**1** で言及した) 名古屋大学保管の別刷 (63 ページの写真) を見ると，この部分を自筆で「定理 V に類似の解が存在する」と訂正している．これは (研究の進展を物語る) 面白い見物 (みもの) である．このページには他にも訂正があって，印刷してあった命題が，その後の計算によって，読者の目の前で忽然と変わるのである．

この様にページは賑やかであるが，ここの理論の立て方に，非 Euclid 幾何学に対する当時の (謂わば “標語的” な) 解釈が表れている様に，筆者には感ぜられる．上記の 3 種類の特殊函数は，確かに古典幾何で基本的な函数である．一方 1960 年に Radon 変換論を新しい領域へ発展させた表現論 (**3**) によれば，非 Euclid 平面の場合には直線や円だけが主役とは限らない．Radon はこの論文だけで打ち止めにして，その後は講義やセミナーでも Radon 変換論に回帰しなかったそうであるが，その原因はこの辺りにあるのかも知れない[8)]．

---

7) この課題の叙述は，論文の表題と同じ意味であり，Radon が抱懐していた目的は，本項のような問題を含んでいたと思われる．このような豊富な構想が全体として，後世に影響を与えたのであろう．

8) 筆者は，Radon がここで結果だけを述べている命題などの計算を続けてみようと思いながら，手を着けないままになっているので，確実なことは言えない．

2.3 高次元の場合

論文の末尾にある n 次元 Euclid 空間上の Radon 変換は，平面の場合の定義を拡張したものである．即ち，n 次元空間の中の $(n-1$ 次元$)$ 超平面を用いて定義される[9]．ここで重要なのは，n の偶奇によって反転公式の形が本質的に異なることである．これは Huygens の原理に関係する興味ある結果であるが，このことは，当時から気付かれていた様である．

3. 群の表現と Radon 変換

3.1 課題の概要

群の表現論は，20 世紀中葉に I. Gelfand によるユニタリ表現論によって，新しい方向へ発展した．初期の中心課題は，(形式的には) 連続群の既約表現の構成と分類及び無限次元表現の分解と Fourier 変換であった．有限群以来，既約表現は既知の表現を分解して構成するのが，自然な方針である．最初に思いつく表現は，(恒等表現以外には) 正則表現であろうが，これは (同じ既約表現が無限の重複度をもって含まれているために) 分解が難しい．これに代わる解決が 1960 年の論文[10] にまとめられている．そこでは，既約表現の "基本系列" を記述する問題が，Radon 変換の原理を適用することによって解決された．以下にこの論文の基本的な考えを，最も簡単な $SL(2,\boldsymbol{R})$ の場合について説明する．この論文は，Radon 変換の意味を明らかにするとともに，幾何学や特殊函数論に対しても重要な寄与をした[11]．

3.2 Lobachevsky 平面の Radon 型変換

Lobachevsky 平面 X を，複素上半平面 $\boldsymbol{C}_+$ をモデルとして表すと，合同変換は行列式が 1 に等しい 2 次の実行列で表される：行列 $t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して，$t(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ が合同変換である．この行列全体の作る群（2 次の特殊線型群）を L と記すと，平面 X は，部分群 $H = SO(2)$ による L の商空間になる：$X = H\backslash L$．

(1) 境界円 —— 幾何 (X, L) に対する Radon 型の変換は (Euclid 幾何の場合の直線の代わりに) 境界円を用いて定義される．基底線に平行な Euclid 直線及び基底線に接する Euclid 円を**境界円** (horocircle) と称する．境界円は，円と直線の中間にある特別な曲線である (双曲面モデルでは放物線である)．**境界円群** (horocyclic

---

[9] 現在，Radon 変換という名称はこの場合に限るとされているようである．超平面以外の場合は 1960 年以後に研究されて，興味ある現象が発見されている．

[10] I.Gelfand：「積分幾何学及びその表現論との関係」(ロシア語) —— Uspekhi Mat. Nauk, 15(1960). "積分幾何学" の意味は項 3.2 の (2) を参照.

[11] 1 の古典 Radon 変換を群論によって考察することは，現代史の演習問題になる．

group) とは，上三角行列 $\begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (-\infty < \zeta < \infty)$ からなる群 Z 及びそれと共役な群をいう[12)]．境界円 ω は，Z (またはその共役) による軌跡であるから，ω 全部が作る多様体 Ω は次の様に表される：$\Omega = \mathsf{Z}_1 \backslash L$，ここで $\mathsf{Z}_1 = \mathsf{Z} \times \{e, -e\}$.

(2) 境界円変換 —— X 上の函数の**境界円変換**を，$\tilde{f}(\omega) = \displaystyle\int_{\omega} f(x)\, d_{\omega}x$ によって定義し，H **変換**と略称し，H で表すことにする．本稿ではこの用語とともに "Radon 型変換" という語も適宜使うことにする．H 変換に対して，Radon 変換の基本定理と同様の定理が成立する．なお Gelfand は脚註 10 の論文で，この様な変換を用いる理論を包括して積分幾何学と呼んでいる．

3.3 準正則表現

(1) 基本 affine 空間 —— 群 L は $\boldsymbol{R}^2$ の線型変換群であるが，$\boldsymbol{R}^2$ から原点を除いたものの上に働くと見て，これを**基本 affine 空間**と呼んで，V と記し，その要素を v と記すことにする．(V, L) は $(\mathsf{Z}\backslash L, L)$ と (低次元の部分を除いて) 同型である．重要なことは，幾何 (V, L) では，対角行列が相似写像を与えることである．即ち $\delta = \begin{bmatrix} \delta & \\ & \delta \end{bmatrix}, \delta > 0$ とするとき $t \circ \delta = \delta \circ t$.

(2) 準正則表現 —— V の上に函数空間 $S = S_V$ [13)] を定義し，$Q_t\ :\ f(v) \to f(t(v))$ によってユニタリ表現 (S, Q_t) を構成することができる．これを群 L の**準正則表現**と呼ぶ．このとき，相似写像 δ に対して，$T_\delta \circ Q_t = Q_t \circ T_\delta$ ．即ち T_δ は表現 (S, Q_t) の commutor (可換作用素) であり，これを用いて表現を既約表現の (重複度が一様に 2 の) 連続和に "分解" することが出来る．

(3) H 変換と準正則表現 —— $X = H\backslash L$ の上に (L - 不変測度を用いて与えられる) L のユニタリ表現 $T = (X, T_t)$ を考察する：

$$S = S_X = \{f(x)\}\ ;\ T_t\ :\ f(x) \longrightarrow f(t(x)).$$

前項 3.2 によって，表現 (X, T_t) の H 変換は (Ω, T_t) であり，また $\Omega = \mathsf{Z}_1 \backslash L$ である．これは Ω が $V = \mathsf{Z}\backslash L$ を 2 重の被覆面とすることを意味する．従って，直和表現 $T \oplus T$ が準正則表現 Q と一致することになる．これによって T の既約分解が得られる．

この T の既約分解は，X の Laplacian の固有値問題でもあり，この観点からは，Laplacian の固有函数である円錐関数を用いて，記述することが出来る (項 2.3).

---

12) この行列群 Z は Gauss に由来する．表現論で，重要な役割を演じる概念である．
13) S は C^∞ かつ急減少の函数の空間.

4. 技術における Radon 型変換

Radon 変換の原理を応用して，最初に A.M.Cormack によって発明されたのが，X 線 CT(computerized tomography) と呼ばれる装置である (項 4.1)．その後，医療や自然科学の種々の目的に応じて，多種類の装置の発明が相次ぎ，現在に至っている (項 4.2 でこの様子に触れる) が，ここで数学の伝承という問題が目につく (付記)．

4.1 X 線 CT の発明

(1) Cormack の課題 —— 発明までの経過を，Cormack 自身が述べているところによって，以下に要約しよう[14]．1955 年に彼は Cape Town 大学の附属病院[15] から，同位元素の使用を監督する業務を依嘱された (彼は放射線物理学者であった)．この業務の傍ら，(病変部位に X 線を照射する)X 線治療法に関心を持った．当時の治療法が，人体を均質な物質と仮定して X 線の減衰を算定しているので，これを改良して，患部に照射する線量の適切な分布を定めるようにすることが必要であると考えたのである．

それには X 線吸収係数の (患者の輪切り一枚ずつにおける) 平面分布 $f(x)$ を，体外から計測しなければならない．いま直線 L に沿う X 線の入射強度を I_0，透過後強度を I とおくと，$\log(I_0/I) = \int_L f(x)\,ds$ となる．左辺は計測出来る量で，これを $F(L)$ と書くと，解くべき問題は，直線の函数 $F(L)$ から $f(x)$ を求めることである．この命題を立てる過程は，Radon 変換論の視覚的な判り易い例であろう．

(2) 解決 —— Cormack はこの問題について，身辺の数学者達に尋ねたが，誰も答えられず，Radon の仕事も知られていなかった (付記を参照)．彼自身が Radon の論文を知ったのは，この時から 15 年後だったそうである．それればかりでなく，(輪切り面の $f(x)$ を粗い形で求める)tomography と呼ばれる技術が放射線医学に既にあったことも知らなかったという．

そこで彼は，単純化した模型について実験する傍ら，Abel の積分方程式や Tschebyshev 多項式を探し出して，自分で現行の様な公式を導いた．1963 年には自作の装置 (X 線走査装置) を用いて，(標本の) 脳腫瘍の $f(x)$ を計算した．「僅か 250 個の data に拠ったにしては，一致は良好だと思った」と彼は言っている．これは，今から振り返ると，諸方面にとって幸運なことであった様に思われる[16]．

---

[14] A.M.Cormack : Early Tomography and Related Topics —— 1980 年 2 月に Oberwolfach で開催されたシンポジウムの紀要 "Mathematical Aspects of Computerized Tomography"(1981) に収録されている．

[15] C.Barnard による心臓移植で有名な病院である．

[16] 現在の CT 装置の設計は，Radon の結果の直接の応用と言えるほど簡単なことではないが，仮に問題が出現したときに既にそういうものであったとすれば，この技術は生まれなかったかも知れず，生まれたとしても，そのためには長期間の努力を要したであろう．数学には，そういう問題は，平行線問

この結果は1963/64年に発表されたが，Cormackによると「論文は深い沈黙に出会った」．別刷の請求は(スイスの雪崩研究所からのものを含めて)3件だけだったそうである．

4.2 物体の内部を見る技術

(実用化) Cormackと独立にG.N.Hounsfieldは，同じ原理による装置を発明して，1972年に英国の特許を取り，生産を始めた．
(発展) Radon型変換の原理に基づく技術は，謂わば“物体の内部を見ることを可能にする技術”である．これは1972年頃，堰を切ったように発展し始めた[17]．計算機の進歩に援けられた，陽電子CT(PET)や磁気共鳴画像装置(MRI)などの発明と実用化によって，電波天文学，地球物理学など，医療と自然科学の多数の領域で画期的な成果が生まれている．

付記 数学の伝承について —— はじめにRadon変換論の特異な文献として，G. D. Birkhoffの論文を挙げる．Birkhoffは20世紀前半の米国数学界を代表する数学者の一人で，topology，常微分方程式，力学系等で多くの仕事がある．彼は1940年に，“直線で絵を画く”ことについて論文を書いている(On Drawings Composed of Uniform Straight Lines — J.de Math. (Liouville), 19 (1940), 221-236)．実質的な内容はRadonの論文の第1部分とよく似ているが，引用文献は一つもない．従って全くの独創であろう(ちなみに反転公式は，Abelの積分方程式とFourier級数を組み合わせた長い計算で証明されている)．表題にいう直線で描いた“顔”の絵が載っているが，これはRadon変換論を用いて画かれた最初の絵であろう(現在のCTとは異なる方法で，人手によって画かれたものである)．

この様に独創的であるにも拘わらず，この論文は(筆者が調べた限りでは)Radon変換論の文献表のどれにも載っていない．つまり全く孤立し，忘却された論文らしいのである．しかし論文の歴史的位置からすれば，この状況は妥当ではないであろう．

Radon変換論もtomographyも，何度も生まれては忘れられたものの様である．こういう事態は数学で(更に技術でも)一般的なことかも知れない．

数学を理解するためには，文献だけに頼らず，口頭伝承を大事にすべきであると筆者は思っている．源泉かそれに近い人から雑談等のうちに聞いたことは，いつか

題などいくつもあった．技術でも，飛行機などはその例であろう．

[17] Cormackは‘Around 1972 the dam burst.’と書いている．彼自身は1970年代初期からRadon型変換などの応用の研究に回帰した．また彼はHounsfieldとともに，1979年のNobel賞(医学生理学)を受賞した．

役に立つことがあるかも知れない (役になど立たなくてもよいが). 筆者は Birkhoff の論文の存在を, 角谷静夫先生から教えて頂いた. それは大阪大学の学生だった 1945 年 (戦争中) のことだったが, 三人でしていた雑談の中のほんの断片であった. 当時は 1940 年の Liouville 誌など勿論見ることは出来ず, そのまま忘れていたが, 18 年後に米国で, 表現論と積分幾何について指導していた時期に, 幸いにこの雑談のことを思い出したという経験がある.

第4章

コンピュータ・トモグラフィの歴史
— 数学者は何故ノーベル賞を取り損ねたのか？ —

金子　晃

0.　序

コンピュータ・トモグラフィ(CT)，すなわち計算機断層撮影法は X 線等の連続照射により人体などの断面図を非破壊的に作成する技術である．難しいことは言わなくても，幸いに（？）自分の脳の CT 像を病院で見る機会を持たれた方は，その美しさに驚嘆された経験がおありであろう．(次ページに最新の機械による人体の横断面の CT 像を掲げておく.) これは一昔前の断層撮影のぼけた映像をご存じの方にはなおさら新鮮な衝撃を与える．

この技術は 1972 年に，ビートルズのレコードで有名なイギリスの会社 EMI の技師ハウンズフィールドによって発明された．実用的な機械の製作はともかくとして，この原理は非常に数学的であり，一言で言えば，ラドン変換の数値的反転と言うことになる．ハウンズフィールドはこの発明により 1979 年度のノーベル賞（生理・医学賞）を受賞したが，彼とともに，一人の物理学者コーマックがこの発明に理論的に寄与したとして併せて受賞した．

しかしながら，この発明で用いられた数学的な原理はすべて数学者により用意されていたものである．うまくやれば数学者がノーベル賞を取れたかもしれないこの希有な機会を，数学者は何故逃してしまったのであろうか?この点を調べておくことは，今後の教訓（?!）として大切なことであろう．^^;

ここで簡単に計算機トモグラフィの原理を述べておく．今，有界領域 D で表される物体は，X 線をある割合で吸収する物質からできており，この吸収率 $f(x,y)$ は通常の密度とほぼ対応するので，それがわかればこの物体の内部構造がわかるものとする．

この物体を貫く直線 $\ell=\{x\cos\theta+y\sin\theta=t\}$ に沿って光源での強度が I_0 の一本の X 線を当てたとき，ブーゲの法則により，この X 線の強度 I は

$$\frac{dI}{I}=-f(t\cos\theta-s\sin\theta,t\sin\theta+s\cos\theta)ds$$

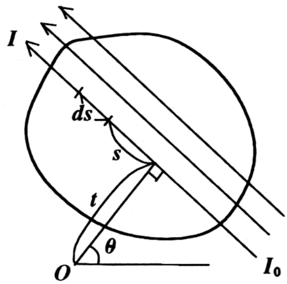


図 1

に従って変化する．この簡単な微分方程式はただちに求積でき，その結果，物体を突き抜けた後に観測される X 線の強度として

$$I = I_0 \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\theta - s\sin\theta, t\sin\theta + s\cos\theta)ds\right\}$$

が得られる．従って，数学的には，各 ℓ に対する線積分の値

$$Rf(\theta, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\theta - s\sin\theta, t\sin\theta + s\cos\theta)ds$$

を与えて，元の関数 $f(x, y)$ を再構成せよという問題に帰着し，これはとうの昔に Radon (1917) が解を与えていた．このラドンの論文は CT の前史に関わった技術系の人達にはかなり後まで知られず，単に $Rf(\theta, t)$ を球面平均したものを用いる，いわゆる "old tomography" の再構成公式が何度も再発見されてきた．ラドンの反転公式が知られてからは，その本質を理解するために現場の人たちがにわかに Stieltjes 積分を勉強し始めたという時代も有ったということである．しかし再構成アルゴリズムの困難さは，反転公式に含まれた Stieltjes 積分の表現の難しさなどではなく，この再構成過程が，一般にコンパクト作用素[1] の逆を求めるときに必ず現れる，いわゆる非適切問題 (ill-posed problem) となっているところにある．

すなわち，数学的には，ラドン変換はすべての (θ, t) の値について誤差のないデータとして与えられるとするのに対し，実用的には，使用できる X 線の本数は高々 180 方向 × 180 ステップ ≒ 3,0000 本程度であり[2]，かつ，各線積分は観測誤差を含む．このようなデータから逆作用素を計算すれば，誤差の影響はいくらで

1) 厳密な定義は省略するが，積分のように平滑化の性質を持った作用素を抽象化した概念で，ただの連続作用素よりも良い性質を持つ代わりに逆作用素は（存在したとしても）その分性質が悪くなる．
2) 現行の医療用 CT では 900 チャネル × 1000 ビュー程度のデータをとっているそうである．

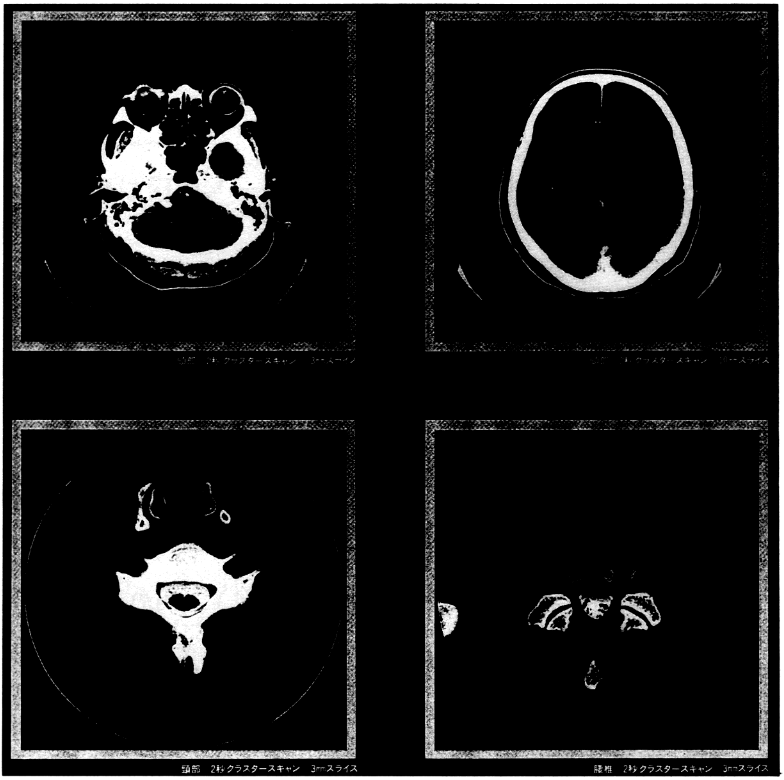


図 2 最新の CT 装置による人体の断面像
(GE 横河メディカルシステムのパンフレット (1994) より)

も拡大され，計算結果には何の意味も無い，と考えるのがアダマール以来の適切 (well-posed) な問題を研究対象とすべしという解析学の伝統的な考え方であった．これに対し，1960 年頃から始まったチホノフらによる非適切問題の正則化の理論は，正則性が予め判っている解の存在を仮定して，一言で言えば誤差に含まれる不必要な高周波成分をカットすることにより，近似原像を構成しようというものであった．残念ながら チホノフ の理論は，積分方程式の形に抽象化して与えられていたにも拘わらず計算機トモグラフィに応用される機会を逸し，この理論への直接的な応用の論文は，物理学者達によって書かれた．

以上の過程では数学者にも物理学者にも運の良い人，悪い人がいろいろ居て，それなりに面白い物語となっている．では数学者はこの問題でうまくやればノーベル賞を取れる可能性が有ったのだろうか？ 以下，この問に答えることを目標として

CT の原理とその歴史をより詳しく見てゆくこととしよう.

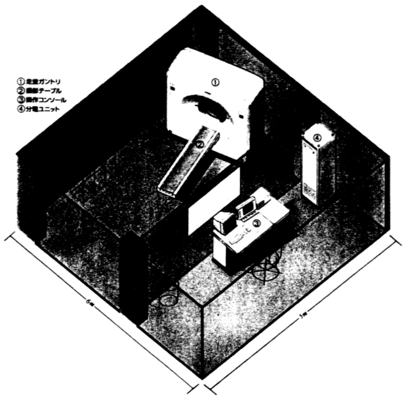


図 3 現行の CT スキャン装置の一式
(GE 横河メディカルシステムのパンフレット (1994) による.)

1. ラドンの反転公式

CT の数学的原理の第一は数学的なラドン変換である. よってここでも最小限のことをまとめておこう. 以下, ジュニアの読者には見慣れない記号が現れることと思うが, 後を読むためには雰囲気だけを感じとっていただければ十分なので, 挿し絵のつもりで眺めてほしい.

普通, ラドン変換と呼ばれるものは $\boldsymbol{R}^n$ に一般化して考えると, 与えられた関数 f に対しその超平面に関する積分値を対応させるもののことを言う : $\omega \in \boldsymbol{S}^{n-1}$, $t \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(x) \mapsto Rf(\omega, t) = \int_{\omega x = t} f(x) dx \tag{1.1}$$

これは柱状集合 $Z := \boldsymbol{S}^{n-1} \times \boldsymbol{R}$ 上の偶関数と解釈される. これに対し X 線 CT により関係が深いのは, f に対しその直線族に関する積分値を対応させるもので, X 線変換と呼んで上と区別するのが普通である : $\omega \in \boldsymbol{S}^{n-1}$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$f \mapsto Pf(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\omega) dt \tag{1.2}$$

ここに, 変換後の変数 x は $\omega^{\perp}$ の上でしか意味を持たない. 従って結果は単位球面の接ベクトルバンドル $T := T\boldsymbol{S}^{n-1} \equiv \boldsymbol{S}^{n-1} \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ の上の偶関数となる. (数学的には ± を同一視して射影空間と類似の空間を導入したくなるであろうが, 現

場の人にとってはあまり意味のないことであろう.）これらは Gelfand や Helgason のように（あるいはラドン自身も示唆しているように）一般の次元の線型部分多様体上の積分値を対応させる変換に統一することができるが，それも今の所あまり応用的意味は無いようである．平面 $n=2$ の場合は，両者は一致する．空間 $n=3$ の場合にはラドン変換の方は MRI と呼ばれる電波を用いたスキャン装置で実際に出現する．ここでは (1.1) に限って知られている反転公式あるいは再構成公式（すなわち逆変換を与える公式）の代表的なものを記そう．以下 $g(\omega,t)=Rf(\omega,t)$ と置く．まず，Radon (1917), F. John (1934–5), Gelfand-Shilov (1959) により得られたものは

$$f(x)=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}(-\Delta)^{(n-1)/2}\int_{S^{n-1}}g(\omega,\omega x)d\omega, \qquad (n：奇数のとき) \tag{1.3}$$

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n}}(-\Delta)^{(n-2)/2}\int_{S^{n-1}}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg(\omega,p}{dg(\omega,p)}\omega x-p, \qquad (n：偶数のとき) \tag{1.4}$$

と，空間次元の偶奇により形が異なるものであった．特に $n=2$ の場合の式を少々書き直すとラドンの有名なオリジナル反転公式が得られるが，これについては吉沢先生の解説に詳しく書かれている．次に Helgason (1964) はこれらを

$$f(x)=\frac{\Gamma(1/2)}{(4\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(n/2)}(-\Delta)^{(n-1)/2}R^{\#}g, \qquad R^{\#}g(x):=\int_{S^{n-1}}g(\omega,\omega x)d\omega, \tag{1.5}$$

と，一つの式にまとめた．ここに $(-\Delta)^{(n-1)/2}$ は n が偶数のときにはいわゆる分数べきとなり，その定義は一般にフーリエ変換を介して

$$(-\Delta)^{(n-1)/2}f(x):=\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{n-1)/2}\widehat{f}(\xi)]$$

で与えられるが[3)]，実はこの例は擬微分作用素導入のきっかけとなったもので，M. Riesz 1949 により Newton ポテンシャルに類似の積分作用素（Riesz ポテンシャル）として導入された．同じく，微分を中に入れてまとめた式

$$f(x)=\frac{\Gamma(1/2)}{(4\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(n/2)}R^{\#}\left[\left|\frac{d}{dp}\right|^{n-1}g\right] \tag{1.6}$$

を Ludwig (1966) が与えた．$|d/dp|^{n-1}$ は $(-\Delta)^{(n-1)/2}$ の一次元版であるが，n が偶数のときは普通の微分といわゆる Hilbert 変換を使って書き直すこともできる．

以上とは関連しているがある意味で独立なものに，ラドン変換をフーリエ変換と結びつけた公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega,t)e^{-it\rho}dt=\widehat{f}(\rho\omega) \tag{1.7}$$

3) 以下，f のフーリエ変換を $\widehat{f}$, $\mathcal{F}f$ などで表す．

がある．従って左辺の逆フーリエ変換を計算すれば元の f が再構成できる．この式はトモグラフィの現場の人たちに“投影切断定理”と呼ばれて重用されてきたが，反転アルゴリズムとしてはそれほど効率の良いものではない．この式はトモグラフィとはあまり関係のない，確率分布の断面分布からその全体像を構成するという問題で，Cramér-Wold により 1936 年に既に得られている．

これらと全く異なった系統に，球関数展開

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(n,\ell)} f_{\ell k}(|x|) Y_{\ell k}(x/|x|), \qquad g(\omega, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(n,\ell)} g_{\ell k}(t) Y_{\ell k}(\omega) \quad (1.8)$$

を用いた公式

$$f_{\ell k}(r) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^{n/2}} \frac{\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma(n-2)} r^{2-n} \int_r^{\infty} (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} C_\ell^{(n-2)/2}\left(\frac{t}{r}\right) g_{\ell k}^{(n-1)}(t)\, dt \quad (1.9)$$

がある．ここに $Y_{\ell k}$ は ℓ 次の球関数で，その個数を $N(n,\ell)$ とした．C_ℓ^λ はゲーゲンバウアーの多項式と呼ばれる，$[-1,1]$ 上の測度 $(1-t^2)^{(\lambda-1)/2}dt$ に関する直交多項式系である．これは $n=2$ のときに Cormack (1964) が与えたものを Deans (1979) が一般次元に拡張したものであり，$n=2$ のときは球関数は三角関数，ゲーゲンバウアーの多項式はチェビシェフの多項式となって，より初等的になる．

数学的なラドンの反転公式の歴史については，ノーベル賞をもらったコーマックが [6] で詳しく調べている．別に自分だけがノーベル賞をもらって後ろめたかったと言う訳でも無かろうが，なかなか面白い事実を丹念に掘り起こしており，一読に値する．

2. 非適切問題

上で得られた公式をそのまま数値計算したら CT 像が出来上がるのであれば，これらの公式を導いた人たちも大いにノーベル賞に対する権利を主張できたであろうが，事態は残念ながらそう簡単では無い．それはラドン変換の逆がいわゆる非適切問題の代表例となっているからである．このことは，前節で紹介した反転公式がいずれも微分操作を含んでおり，微分は“連続でない演算”の代表例であることからも想像されることであるが，より厳密には，これらの公式を用いて証明できる Sobolev 評価 からから，逆変換の L_2 ノルムでの不連続性とその非適切性の度合いが正確にわかる[4]．(実用的には L_2 ノルムよりも上限ノルムを用いるべきであ

---

[4] 一般に $\|f\|_{L_2(R^n)} = \left(\int_{R^n} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ を L_2 ノルムという．Sobolev ノルムの説明は省略する．函数解析の適当な参考書を見られたい．

ろうが，理論的な簡明さのために L_2 で代用することは数値解析で一般に行われていることではある.)

ここで“非適切問題”について簡単に解説しておこう．そもそもこの言葉は適切な問題に対するアンチテーゼとして生まれたものであるから，まずは適切性の話から始めるのが自然であろう．実はこのシンポジウムでのお話を承ったとき，杉浦先生のご希望は 20 世紀における偏微分方程式の発展を振り返るということであったようだが，そんな大それたことは小生には荷が重すぎるので，むりやり最近勉強しているこの CT の話に変更させて頂いたという経緯があるので，償いという訳ではないが，ほんの少し偏微分方程式の話をしよう.

20 世紀の偏微分方程式論の始祖がアダマールであることは，ほぼ専門家の意見が一致するところであろうが，その根拠は，彼が偏微分方程式の問題設定における適切性の概念を導入したことによる．偏微分方程式の初期値問題を考えるとき，コーシー - コワレフスキーの定理によれば，データが解析関数である限り解は存在する．しかし，波動方程式のときにはこの解がそのまま物理的に意味のある解と結びつくのに対して，ラプラス方程式の場合には，初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{on} \quad \boldsymbol{R}^2, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

は物理的意味を持たない．それは例えば,

$$\varphi(x) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{に対する解} \quad u(x,y) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} \cosh \frac{y}{\varepsilon}$$

に見られるように[5)]，初期値は非常に小さくても，解はいくらでも大きくなりうるからである.（この例は特殊すぎると思われるかもしれないが，実はこの方程式の場合は，集合論的に言って微小初期値のほとんどがこんな具合に増大する解をもたらすのである.）現場の観測あるいは設定には誤差は付き物だから，もしもこのような解析的問題を必要とする物理現象があったとすると，実験の度に初期データに上のような微小誤差が混入するという不幸な状況では，結果は予期し得ず，あたかも解の一意性すら無いように見えるであろう．アダマール は，データに対して解が連続に依存するような問題設定のみが意味を持つと考え，数学的な偏微分方程式論もまた，そのような“適切な”問題を追求すべきであるとした．20 世紀における偏微分方程式論の主要な流れは，アダマール のこの考えに基づいてひたすら適切性を追求してきたと言ってもほぼ間違いではなかろう.

しかしながら数学の可能性はまた自然界の多様性と同じく，はなはだ広い．世の中ではラプラス方程式の初期値問題も飛行機の翼付近に生ずる境界層の記述など

5) $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

に現れるし，強い平滑化のために逆には戻れないはずの熱方程式を，時間を遡って解くことが制御理論などで必要となる．このような“非適切問題”は偏微分方程式論の正当な“順問題”に対して，未知量と既知量を入れ替えた“逆問題”を考えるときほとんど常に生ずるものである．そこでこのような非適切問題を解くということの数学的な意味を抽象的に確立しようという試みが 1960 年代に始まった．その中心は チホノフ (1963) であるが，実は物理学者のフィリップス[6)]も独立に同様の考えを提出していたことが後で知られ，今日ではこれを チホノフ - フィリップスの正則化の理論と呼ぶことが多い．

正則化理論の解説は紙数の都合で省く（参考書 [7] などを見られたい）．一言でいえば，逆作用素の計算に誤差の影響が大きく作用するのは高周波成分に対してなので，始めから高周波成分は無いものとして，それを適当に丸め込んだ連続な作用素で逆作用素の代用とするのである．

更に，離散化によって再構成像の数学的な一意性さえくずれてしまうということがある．

これについても紙数の都合で解説は省略するが，その対処法を一言で言えば，正則化と同様な考え方で，最も合理的な解（一般にはノルム最小の解）を選ぶのである．

3. 数値的再構成アルゴリズム

以上に述べてきたように，CT の離散化と数値計算は，例えば楕円型方程式の境界値問題のように適切な問題のそれとはずいぶん様相が異なる．ハウンズフィールドは [11] で，“当時数学的な方法で利用できそうなものはどれも理想化されすぎていて役には立たなかった．私は常識的な（と信じたい）実用的方法で画像の再構成を行ったのだ”と述べている．文献が無かったというのは事実ではないにしても，当時としては，そう言われるのは仕方がないくらい，主流の数値解析からかけ離れたものであったことは間違いなかろう．ここでは代表的な二つのアルゴリズムを紹介する．もう一度強調しておくが，ラドンの反転公式をそのまま離散化しても決して良い結果は得られない．

代数的再構成法　第一のものは ART と略称される代数的再構成法 (algebraic reconstruction technique) である．(わざわざ“代数的”という形容詞がついているのは歴史の偶然で，この方法だけが特に代数的という訳ではない.) これは，対象物を正方形などの網目 $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ で覆い，その各要素 Ω_j，いわゆる画素 (pixel=picture

---

6) 有名な解析学者の R. S. Phillips とは別人

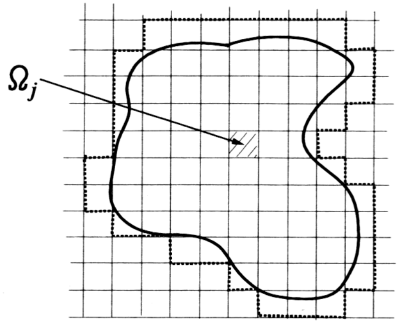


図 4 ピクセル分解

element) では物体の密度 $f(x)$ は定数 c_j に等しいとみなす．数学的には

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_j(x) \tag{3.1}$$

という近似をすることになる．ここに χ_j は第 j 画素の集合 Ω_j の定義関数，すなわち，この集合の上で値 1 を，その外で値 0 をとる関数である．これに応じて観測に用いる直線も $L_i, i = 1, \ldots, M$ と，有限個を用意する．上の近似関数に対し第 i 直線 L_i に沿う線積分を厳密に計算すれば

$$\int_{L_i} \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_j(x) dx = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathrm{length}(L_i \cap \Omega_j)$$

となる．定数 $a_{ij} = \mathrm{length}(L_i \cap \Omega_j)$ は個々の観測とは独立に，予め計算しておける量である．よって

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} c_j = g_i, \qquad i = 1, \cdots, M \tag{3.2}$$

という連立一次方程式が得られた．

数値解析では大抵，最後は行列の計算になるので，これは正統派の問題のように思われるかもしれないが，実は上の連立方程式は，例えば楕円型境界値問題の離散化で現れるもののように，係数行列 A が一般には正方ですらなく，データ数をそろえて正方行列にしたところで逆行列が存在するわけでもない．また非零成分は非常に少ないものの，その分布がでたらめで行列全体に拡がっている．CT を発明したハウンズフィールドも以上の離散化法にはすぐ行き着いたものの，さて方程式

(3.2) を解く段になっていろいろ数学の文献を調べたが役に立つものは見つけることができず，結局単純な反復法で解いたようである．彼は自分のアルゴリズムをきちんと記述していないので，詳細は不明だが，Natterer に聞いたところでは，以下に述べるような方法を自分で発見したらしい．

実は，この手の方程式が数学でかつて扱われたことがなかったというのは間違いで，夙に第二次大戦前のポーランドで Kaczmarz(1937) という人が次のような方法を与えている．今，行列 A の第 i 行 $(a_{i1},\cdots,a_{iN})$ を $\vec{R}_i$ と置く．超平面 H_i : $\vec{R}_i\cdot\vec{x}=g_i$ への直交射影を P_i とし初期近似解 (initial guess) $\vec{x}_0$ から出発して H_i への直交射影像をとる操作を繰り返す．一回の射影では，公式

$$P_i\vec{x}=\vec{x}+\frac{g_i-\vec{R}_i\cdot\vec{x}}{\vec{R}_i\cdot\vec{R}_i}\vec{R}_i$$

で行き先が計算できることは，簡単な初等幾何学的考察でわかるから，$P=P_MP_{M-1}\cdots P_1$ を一回の反復過程とみなし，初期値 $\vec{x}_0$ から出発して $\vec{x}_k=P\vec{x}_{k-1}$ により次々と近似を上げて行く．誤差のない純粋数学の世界では，これが (3.2) の一つの解（実はノルム最小の解）に収束することが証明されるのであるが，実用的には適当なところで止めておいた方がかえって良い像が得られる．パソコンでの実験なら 4 回も反復すれば十分である．もっとも一回の反復過程は M 回の直交射影の計算を含んでいることに注意されたい．また，加速法と言って，適当なパラメータ $0<\omega<2$ を導入し，直交射影 P_j 自身の代わりに

$$P_j^{\omega}:=(1-\omega)I+\omega P_j$$

を用いた方が速く収束することが多い．パラメータ ω の選び方は大抵は試行錯誤による．

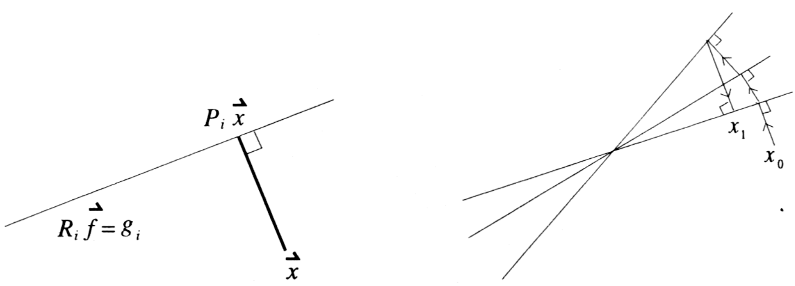


図 5 ART の原理の説明図

アルゴリズムが分かったら，お手持ちのパソコンで実験してみたくなる人も居られよう．そこで，以上のアルゴリズムを実行する際に注意すべき点を二三述べておこう．直線が正方形により切り取られる部分の長さ length$(L_i \cap \Omega_j)$ の計算は，プログラミングの練習問題には最適である．しかしこうして得られた行列は，M, N が大きいと巨大な寸法になる．(二次元の画像のため，M, N 自身がそれぞれサイズの 2 乗で増大する量だから.) 反復のためにこれを記憶しておいて使うのは，小さな計算機には重い負担となるが，実は a_{ij} の計算はほとんど瞬時にできるので，これをサブルーチンにしておき，反復計算において必要となる度に係数 a_{ij} をその場で計算し直しても十分実用的な速さで処理できるのである．実験のためには“ファントム”と呼ばれる，脳のシミュレーションモデルをまず用意する．これは脳の断面図に似せた平面図形を，密度に擬した値を持ったいくつかの部品の合成として作成したもので，Shepp-Logan のファントムなどが特に有名である（図 6）．次にパラメータづけられた有限個の直線の族を定めて，これらに対する上の図形の密度関数の線積分を数値積分などで計算する．設定を現実に近づけるためには，得られた数値に乱数を用いて小さな誤差を混入させるとなお良い．こうして CT 実験のシミュレーションデータが得られる．これに上のアルゴリズムを適用して再構成画像を得，元の画像と比較すれば，どの程度正確に再構成がなされたかを知ることができる．

いずれにしてもある程度細かい画像を作成するには，仮想記憶をサポートしたコンパイラが必要である．といっても高価なものが必要という訳ではない．パソコン用の unix に付属している gcc や f77, あるいは MS-DOS 上で DOS エクステ

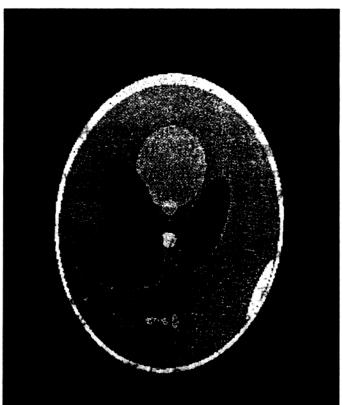


図 6 Shepp-Logan のファントム [15]

ンダーを用いる gnu のパソコン版である DJGPP に含まれている同様の処理系が利用できるので，あまり古くないパソコンなら誰でも実験可能である．医療用 CT のアルゴリズムとしては ART はもはや次に述べるフィルター付き逆投影法にとって代わられてしまったが，考え方が簡明で，新しい問題に対処する柔軟性もあるので，研究者の間では今でも良く用いられている．実際に実験してみても始めに想像されるよりは速いことが分かるであろう．

フィルター付き逆投影法　現行の機械のほとんどが用いているこの方法は，実はハウンズフィールドの自動機械のためにではなく，伝統的な手計算による逆投影法，すなわち有限個の投影データから元の像を再構成するためのアルゴリズムとして，Bracewell-Riddle(1967), Ramachandran-Lakshminarayanan(1971) により提案された．医療用 CT への応用は Shepp-Logan(1974) により提唱されて以来，実用に共されている．これは (1.6) 式の二次元版である

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{Rf}(\vec{\theta},\rho)e^{i\rho t}|\rho|d\rho d\theta \tag{3.3}$$

を用いるものである．ここで $\vec{\theta}=(\cos\theta,\sin\theta)$ と略記した．また $\widehat{Rf}$ は Rf の一変数 t に関するフーリエ変換である．今，上の式において形式的に $\widehat{\phi}(\rho)=|\rho|$ により一変数関数 $\phi(q)$ を定めると，(3.3) を積 $\widehat{Rf}\cdot\widehat{\phi}$ の一変数逆フーリエ変換と見て

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[Rf*_t\phi](\vec{\theta},t)d\theta \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}Rf(\vec{\theta},q)\phi(t-q)dq\end{aligned} \tag{3.4}$$

実は残念ながら，$\phi(q)$ は超関数 $-\dfrac{1}{\pi}\mathrm{f.p.}\dfrac{1}{q^2}$ となってしまい，このままでは数値計算に適さない．しかし実際の f は高周波部分が無視できるものとして，非適切問題の正則化のときと同じ要領で $\widehat{\phi}$ の高周波部分をカットする．例えば最初に Ramachandran 達がやったようにばっさり切り落とせば，$\phi(q)$ として $O(1/q)$ で減少する普通の函数が得られる．$\widehat{f}$ が $|\rho|\geq K$ で十分小さければこれでも良い近似式となるであろう．

残念ながら，$O(1/q)$ 程度の減少度では，畳み込み (3.4) の計算には相当遠くの方までのデータを必要とする．これでは計算量はそう減らないので，$\phi(q)$ をもう少し速く減少するもので取り替えることを試みよう．$|\rho|\leq K$ において $|\rho|$ を近似する関数ならば何でも良いのだから

$$\widehat{\phi}(\rho)=\begin{cases}\dfrac{2K}{\pi}\left|\sin\dfrac{\pi\rho}{2K}\right|, & |\rho|\leq 2K \text{ のとき}\\ 0 & |\rho|\geq 2K \text{ のとき}\end{cases}$$

ととってみよう (Shepp-Logan 1974). この逆フーリエ変換も具体的に計算できて

$$\phi(q) = \frac{1}{\pi}\frac{1+\cos 2Kq}{\frac{\pi^2}{4K^2} - q^2}$$

となる. 今度は連続に切り落とされたので $\widehat{\phi}$ は先の関数より一回余分に微分できることが反映して, 遠方での減少度が $O(1/q^2)$ となっている[7]. よって実用的には, 畳み込み (3.4) の離散化版の計算には数項程度を用いるだけで十分である. 更に, cos 関数を計算する代わりに, 格子点での ϕ の値 $\phi(ka) = -8/\pi a^2(4k^2-1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $(a = \pi/K)$ の線型補間で置き換えたもので ϕ の代用とすれば, 結果はそれほど損なわずに速度の著しい向上をはかることができる. こうして

$$f(x,y) = \frac{a}{2N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Rf(\vec{\theta}_j, ka)\phi(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j - ka) \qquad (3.5)$$

が得られる.

この方法もパソコンで容易に実験できるので試してみると良い. 名前の "逆投影法" の由来は, ω_j 方向の投影像である $Rf(\omega_j, t)$ という一変数関数達から元の関数を再構成するというところから来ている. 比較的少ない方向についてハウンズフィールドの CT 機械以前から存在していた概念である. "フィルター" とは, 公式 (3.4) の関数 $|\rho|$ を高周波カットした近似関数で置き換えることから来ている[8]. この方法はまた, 畳み込み法とも呼ばれるが, こちらの名称の由来は公式の形からして明らかであろう.

4. CT の歴史

CT は英語の computed tomography あるいは computerized tomography の頭文字である. tomography はギリシャ語の "slice" を意味する $\tau o\mu o\sigma$ と graphy とでできている. computed も computerized も, 意味は説明の必要は無かろう. 前者の用語が伝統的で, 後者は最近のものである. どちらでも似たようなものではあるが, 厳密に言うと, 後で注意するように両者には重大な違いがある.

人体の断面を切らずに見たいという要求は早くからあった. 最初の X 線断層撮影の原理は夙に 1921 年, フランスの A.E.M. Bocage により提起されたもので,

[7] 実は Shepp-Logan は始め, この関数を $|\rho| \le K$ にばっさり切り落としたものをフィルターとして提案しており, それだと逆フーリエ変換はやはり $O(1/q)$ でしか減少しない. しかし彼等は値が $O(1/q^2)$ となるような格子点を巧みに選び出して結局は以下と同等な式に到達した.

[8] 応用方面の人達の間では元々の $|\rho|$ もフィルターの一種のように扱われているが, これは元来の公式に含まれていたものであって, 厳密に言えばカットに使われる $[-K, K]$ の定義関数等だけがフィルターなのである. 現場の人達のこの用語法は 2 次元フーリエ変換を忘れて単なる 1 次元フーリエ変換と比較してのニュアンスであるが, 便利な言い方なので我々もこれに従っておく.

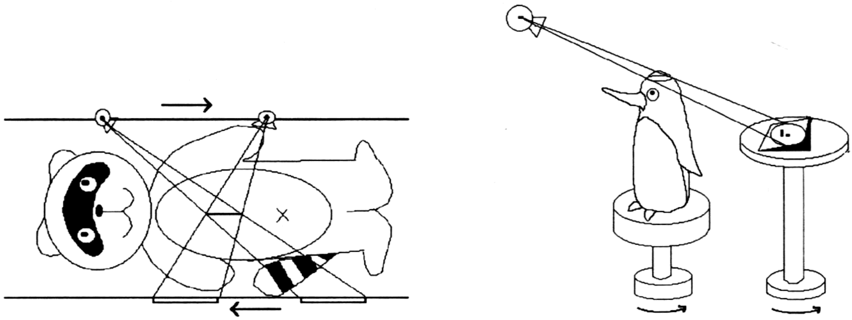


図 7　Bocage の断層撮影法の原理 ([9] の挿絵を翻案したもの)

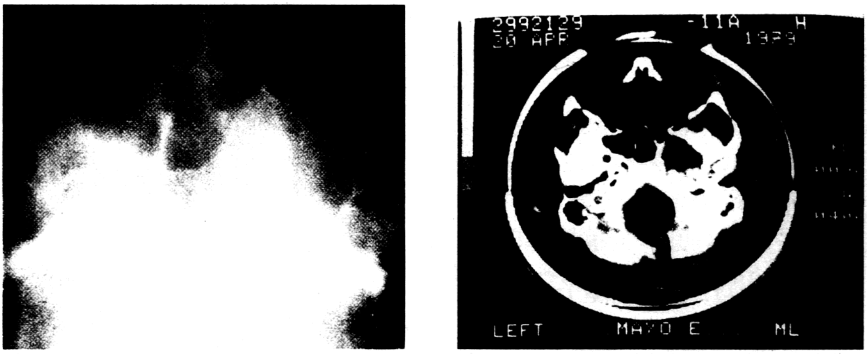


図 8　Bocage の方法を用いた頭部の断面図（左）と CT によるそれ（右）との比較 ([9] による)

図のように X 線源と写真乾板を同調して平行移動あるいは回転させることにより現像すると，特定の部位の断面だけが乾板上にいつも一定の像を結び，他の部位はぼけてしまうので，相対的に前者が観測できるという考えであった．この方法で撮影した脳の断面と，同じものの CT による像が図 8 に比較してある．(CT の方は今となってはやや古いものであるが，それでも違いは歴然であろう．むしろ上のような方法でもこれだけの断面像が得られていたことに感嘆するくらいである.)

ラドン変換の純粋数学的な歴史については，“ラドンの問題の定式化は，平面と球面の差はあるものの，Funk(1913) の方が早かった”等，いろいろ面白い話題も

あるようだが，あまり深入りしないことにしよう．(吉沢先生の記事を見られたい.) CT に直接関わる文献はハウンズフィールド以前にも興味深いものがいくつか現れている．特に，Ambarzumian(1935) はラドンの仕事を知らずに，それとそっくりな反転公式を与え，[1](1936) ではそれを離散化したものを用いて，銀河の中心部から来る光のスペクトル偏奇の観測から，ある種の星の地球から見た動径速度の分布密度を手計算した．図 9 がその結果の一部である．これなどは computed tomography の最初の結果と言えるだろう．(先にラドンの公式は数値計算の役に立たないと言ったが，解像度の低い再構成なら微分を積分よりも先に行うこととし，それを差分で置き換えるといった程度のアルゴリズムでも一応は実用になる.)

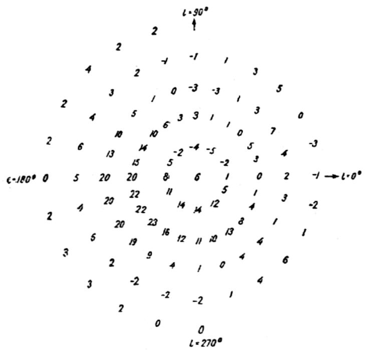


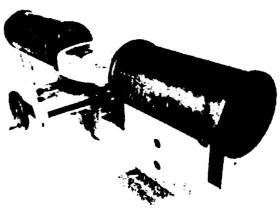
図 9 Ambarzumian による B 型星の動径速度分布図

1956 年には，Bracewell による電波天文学での再構成アルゴリズムの記念碑的な研究が出た．医学におけるトモグラフィの研究は 1940 年代にポーランド人による先駆的な研究があったようだが，本格的な研究はコーマックによるものが最初である．もっとも，コーマックの研究は，本人の書いたもの [5] によれば 1956 年頃から始まったらしいが，発表されたのは 1963, 1964 で，その意味では医学への応用の論文としては Oldendorf(1961) が最初である．彼は逆投影法と同等なアルゴリズムを用いているが flying spot の特定法を示しているのであって再構成画像全体の作成法を論じているのではないところがやや弱い．また Kuhl-Edwards(1963) もエミッショントモグラフィの形でコーマックの論文とほぼ同時期に CT の医学への応用を提案しており，数学的とは言いがたいが再構成の方法も論じている．

1955 年にコーマックは南アフリカのケープタウン大学で物理学の講師をしていた．当時の南アフリカの法律では，放射性アイソトープを扱う病院には特定の資格を持った物理の専門家を監督に置くことが義務づけられていたが，たまたまケープタウンの Groote Schuur 病院の物理学者が辞めて，この町でただ一人の核物理学の専門家であった彼に急遽この仕事が回って来たことが，CT 研究のきっかけと

なった．ここでは，放射線療法の際に局部に照射する線の強度制御のための資料として，人体組織の吸収率による放射線の強度分布図を作成しながら照射療法を行っていたが，コーマックはこれを眺めているうちに，この方法は診断にも役立つのではないかと思いついた．彼はまずそのようなアイデアが既に研究されているかをしつこく調べたのであるが，何も見つからず，最初から考えることになった．こうして“線積分の値から元の関数を再構成する”というラドンの数学的問題に行き当たったのであるが，ここで彼はまた，このようにすっきりした数学的問題は 19 世紀までに数学者が当然答を出しているはずだと思い，いろいろ文献などを探したが，それらしいものを見つけることはできなかった．そこで彼はこの問題に純粋数学的な興味をかき立てられ，自分で解決しようと思い立ったのである．

彼が見いだした反転公式はフーリエ展開を用いたもの (1.9) で，ラドンのそれとは全く異なるものであった．まず [3](1963) では，もとの関数が動径 r のみの関数の場合を扱い，古典的なアーベルの積分方程式に帰着させて答を得た．次に [4](1964) では，これを一般の場合に拡張し，各フーリエ展開係数毎にアーベル型積分方程式を 解いて，チェビシェフ多項式を用いた再構成公式を得ることができた．いかにも物理学者好みの解答であった．彼は物理学者らしく，自分の得た公式の有効性を示すために，アルミ板と木でできた円盤を作り，これにガンマ線を当てて透過線の強度を各方向で測定し，自分の公式を用いて再構成画像を計算したものを論文に添付している．特に，最初に行った実験では，盤の中心付近において再構成データの方にアルミ板の密度の異常が現れたが，密度一様な板を購入したと信じていたコーマックはしばらく悩んだ末，購入先に照会して，実は中心付近の密度が小さくしてあったことを知り，大いに愉快であった，という手柄話を [5] に記



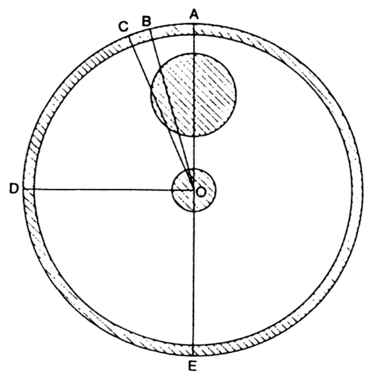


図 10a コーマックの実験機械と実験に用いた盤の図 [5]

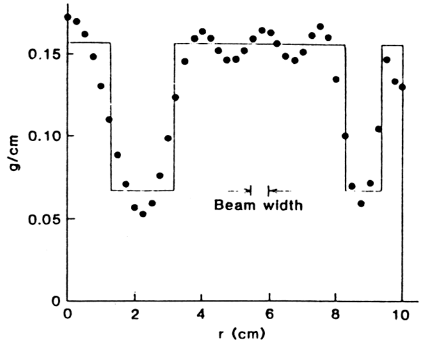


図 10b 同上の コーマックによる再構成データ

している.

このコーマックの仕事を元にしてハウンズフィールドの機械ができたのであれば，二人のノーベル賞受賞は当然であるが，実は話はそう簡単ではない．ハウンズフィールドはコーマックの仕事に気付かなかったのである．また，もし気付いていたとしてもラドンの仕事 と同様，ハウンズフィールドの役には立たなかったであろう．というのは，コーマックの与えた再構成公式も，あまり安定性の良いものではなく，彼が実験に用いた程度の解像度ならともかく，医療用の CT のような細かいメッシュでの再構成に利用しようとすると，非適切性の影響で再構成画像の信頼性がなくなってしまうことが後で明らかとなったからである．事実は，前に述べたようにハウンズフィールドは自分で ART 型の反復解法を用いて，離散化されたラドン変換を反転したのである.

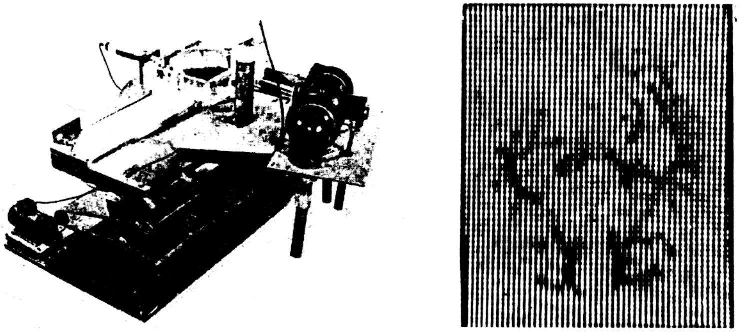


図 11 ハウンズフィールドの 実験機械とブタの脳の標本による再構成実験の結果 [12]

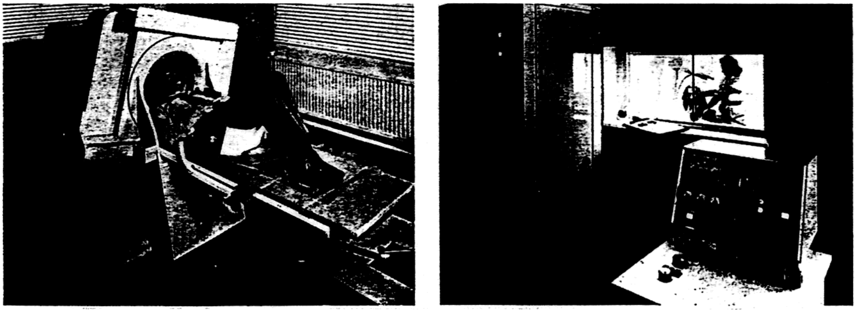


図 12a ハウンズフィールドの 設計による最初の医療用 CT 装置 [11]

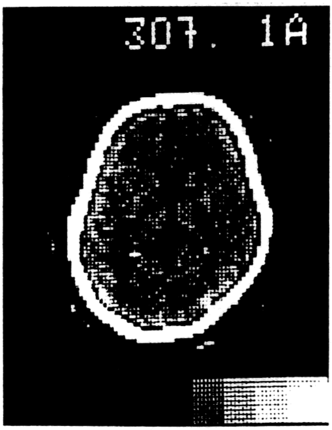


図 12b 同上を用いて得られた生きた人間の脳の CT 像 [2]

ハウンズフィールドの用いた逆投影法の考え方自身は，彼以前に X 線解析を用いる物理などの分野で，また医療の分野でも既に用いられていた．すなわち，いくつかの方向からの X 線像を，そのまま現像するのではなく，

$$\text{透過 X 線の強度分布} \quad \fallingdotseq \quad \text{密度関数の投影像}$$

として記録し，それらから，主にフーリエ変換（投影切断定理）を用いて再構成画像を計算していた．この計算法のアルゴリズムの改良案として ART は Gordon-Bender-Herman(1970) により，フィルター付き逆投影法でさえ Bracewell-Riddle(1967), Ramachandran-Lakshminarayanan(1971) と，いずれもハウンズフィールド以前に提出されていたものである．こうしてみるとハウンズフィールドの寄与はいったい

何だったのかと思えてくるが，実は彼が試作した機械は，それまでの逆投影法とは質的に異なる大量の方向・直線の標本数を用いており，この大量データの処理を，観測データの取り込みから再構成画像の計算と結果の表示まで，計算機を用いた一貫作業とすることにより可能ならしめたという点に最大のポイントがある．まさに，CT を “computed tomography” から “computerized tomography” に変えたのが，彼の功績なのである．量の変化は質の変化をもたらすと，誰か偉い人が言っていたが，実際にもハウンズフィールド以後，CT の有用性は疑い得ないものとなって今日に至っていることは周知の通りである．図 12 にハウンズフィールドが最初にセットした Atkinson Morley 病院での CT 装置一式の写真があるが，本稿の最初に掲げた最新の設備と比較してみても，個々の機械の技術的進歩はさておき，装置全体としての概念にはほとんど変わったところはないことが良くわかり，これも彼の業績を暗示していると言えるだろう．

CT のその後については，照射ジオメトリの改良が重要である．ハウンズフィールドが作った機械では図 13 の (a) のように線源と検知器の成す直線を定まった刻み幅でまず平行移動し，次いで方向を少しずつ変えて再びこれを繰り返す，という，いわゆるパラレルビーム型のスキャンをしていた．最初の機械では一セットのスキャンに 4 ~ 5 分を要したという．その後，線源から扇状に出る X 線をそのまま利用して，これを円弧状に並んだ複数の検知器で一度に観測し，方向を変えてこれを繰り返すという，いわゆるファンビーム型のスキャン方法（図 13 の (b)）が導入されてスキャン時間が著しく短縮された．この二つは標本となる直線の配置が全体としてもやや異なるため，数値解析的にも少し違いがある（離散誤差の計算などが少し複雑になる）が，数学としての本質にはそれほど違いはない．ファンビームスキャンの医療用 CT への応用は Shepp-Logan(1974) により提唱されたが，この理論自身は電波天文学のトモグラフィで Bracewell 以来，既に用いられていた．もともと電波天文学では，線源は遠方に固定された電波源であり，ファンビーム型の方が自然である．更に，検知器も地球上，あるいはせいぜいロケットの届く限りの地球の近傍に制限されていて，いわゆる制限データのトモグラフィの典型例となっている．

CT の技術的進歩としては，この他に X 線をラジオ波に変えた NMR（核磁気共鳴）の原理を用いた MRI（磁気共鳴描像）の導入が挙げられる．NMR の原理は，磁場中に置かれた水素原子などの磁気モーメントを持つ原子核が歳差運動を起こし，それがこの運動の周期に合った電磁波を選択吸収することを利用したものであり，1946 年に E.M. Purcell と F. Bloch の二人が独立に発見したものであるが，実は 1944 年の E.K. Zavoiskii が最初だと言うことである．Lauterbur(1973) が磁場に線型勾配をかけることにより情報の取り出しが容易になることを見出してから実用化が本格化し，80 年代に入って CT にも応用され始めた．X 線と異なり

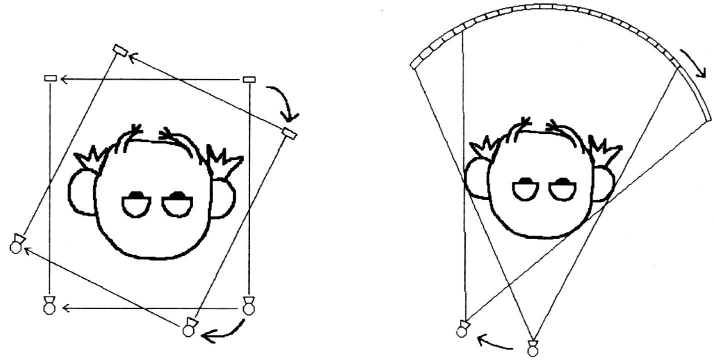


図 13 パラレルスキャンとファンビームスキャン ([9] の説明図を翻案したもの)

被爆の副作用が無く，また改良によって解像度も X 線 CT に引けを取らなくなってきたので，医療的には非常に優れているが，現在でも装置の価格が X 線 CT の 10 倍ほどする．装置自身の形状は CT を一回り大きくしたような感じである．また，体内に注射した放射性物質からの放射光を記録する PET（陽電子放射トモグラフィ）も早くから用いられているが，これは数学的には X 線 CT とあまり変わらない．この他，最近では音波トモグラフィやレーザー光トモグラフィの研究も進んでおり，非線型の ART など，いろいろ面白い数学的問題を与えている．

制限データのトモグラフィについては，電波天文学の他にも，観測窓を少ししか開けられないトカマク炉でプラズマの状態を解析したり，地震波の到達時間を元に地下の密度分布を再構成するといった分野でも重要な，ホットなテーマである．数学的には制限データトモグラフィは非常に強い非適切性を示す（ちょうど正則関数の解析接続を数値計算するような感じになる）ので数学的には不可能に近い問題であるが，個々の具体的問題については，極端に意地悪でなければ（解像度をあまり上げないようにしなければ）何とか実用的に処理できるといったところである．

最後に述べた地震波のトモグラフィは，今まで述べてきた CT とは異なり，波が伝わる経路すら地下の密度が分って後に初めて定まる最短経路（測地線）であることから，数学的には非線型の非常に難しい問題となり，まだあまり解明されていない．実際の地下には，反射や時間的遅延を起こす断層などもあり，かつ幾何光学的近似だけでは済まない回折などの影響もあって，更に複雑である．現場の人たちは，これを仮想経路を用いた反復法や，最も平凡な解を選ぶと言った統計的手法を用いて，それなりに実用的な（我々から見ると驚くほどきれいな）再構成図を作成している．

以上では二次元の CT についてしか話さなかったが，三次元 CT もまだおおむね研究段階である．平行平面の族による二次元トモグラムのセットを用いれば一応の三次元描像が得られるので，通常の CT に対して実用に共するにはそれなりの利点が必要とされるであろうが，例えば心臓の機能検査など，三次元的な同期映像が必要とされる場では重要であり，X 線の錐状ビーム照射や MRI のように一度に多次元のデータが取れる装置と組み合わせての実用化が進んでいる．装置を平面内で回転させる代わりに回転しながら軸方向に少しずつ移動するヘリカルスキャンという方法は，三次元スキャンの中でも最も二次元に近く実用化も進んでおり，相当な早さで連続撮影が可能である．一般に三次元の X 線変換の反転は，数学的には非適切性はラドン変換のそれよりも弱く，Sobolev の示度で 1/2 だが，実用的にはかえって安定性が悪く，なかなか大変である．数学的には最低どの程度のデータが必要とされるかを Orlov 1974, Tuy 1983 が示している．

CT に関連した純粋数学的研究についてもいろいろと面白いものがあるが，紙数の都合ですべて別の機会にゆずる．

CT の歴史を見るとき知識の伝承がうまくゆかなくて再発見されたことが実に多いことに驚かされる．これは，少なくとも初期の段階ではラドン変換やトモグラフィがそれぞれの学問領域においてマイナーな話題であったことにもよるだろうし，また個々の事実の中にはそれほど難しいことでは無く，調べるよりも新たに考える方が手っ取り早いというものもあったかもしれない．ハウンズフィールド，コーマックの二人とも“何か文献が有るだろうと思って探したが見つからなかったので自分で考えた”とほぼ同じようなことを言っている．二人の近くにいた数学者が博識でなかったとは言うまい．ただ数学者は世の中では“易しい数学ほど役に立つ”ことにもう少し留意して宣伝に務めるべきではあろう．コーマックは純粋数学の文献を，ハウンズフィールドは応用数学あるいは物理の文献を探したであろうから，宣伝不足という点ではどちらも同罪である．ハウンズフィールドの傍にいた者が適切な数学的助言を与えていれば，一緒にノーベル賞をもらえた可能性は有る．

さて，そこで結論として，数学者がノーベル賞をとるための処方は？　まず論文の序に自分の理論が役に立つということを想像しうるあらゆる用途に関して吹聴する．場合によっては可能性の検証は工学者に任せても良いだろう．(アメリカの特許にはその手のアイデアだけのものがやたらと多いとも聞く.) ただし自分で実験機械か計算機シミュレーションができる人は，もっともらしい実験結果をつけ加えるとなお良い．昔 F 先生が講演の折りに，“自分の理論が何か工学などの具体的な問題に応用できるのだ，と言うと，アメリカでは聴衆は感心してくれるが，日本では聴衆は胡散臭そうな目で見る”，と言われたことがあったが，今はさすがにそんなことはあるまい．でも上述のようなことをしたら，肝心の論文が数学の雑誌には載らなくなって，結局首尾良くノーベル賞をもらえたとしても，それは数学者と

してでは無かったということになってしまうことは有りそうな話ではある. 9)

冗談はこのくらいにしてそろそろ締めくくろう. コーマックがノーベル賞をもらえたのは，あるいは幸運のせいかもしれないが，彼は著作の中で繰り返し，“自分の研究は医学の問題を解くためというよりも，数学の面白い問題を解くという点に推進の主要な動機があった”と述べている. つまり自分は純粋数学者として振る舞ったのだと言っている. あたかもこちらの“ノーベル賞の取り方”という視点をあざ笑うかのようではないか. そこで結論としては，聊か最初の意図とは異なるが，“数学者はノーベル賞など取るべきではない”ということにしたい.

既に何度も述べたように，ラドンの与えた反転公式は CT に何の寄与もしていないので，ラドンは生きていてもノーベル賞をもらえたかどうかは定かではないが，それにも拘わらずラドンは CT 学界で非常に尊敬されているのである. それは 1976 年に創刊された 計算機トモグラフィの雑誌 (Journal of Computer Assisted Tomography) の表紙のデザインにラドンのオリジナル反転公式を図案化したものが採用されたことが象徴的に物語っている. 実はこれが純粋数学の在るべき姿ではないだろうか? 純粋数学者は何でも用意しておくが，諸々の世俗的な成果は悠然と他の実学の諸分野に譲る. 世の中は決してこのような態度の純粋数学が滅びることを望まないだろうし，そのまま平和に共存することを歓迎するだろう. 近頃，特に応用数学者と思しき人たちの中に，評論等で純粋数学者の在り方に批判めいたことを書く人が居るが，純粋数学者をあまり攻撃して純粋数学者の世俗性を呼び覚まさない方が平和共存のためには好ましいのではないかと私は思う. 純粋数学者が講義を難しくやるのは，予算をもらえない腹いせをしているのではなくて，全く純粋な動機からなのであるから，いじめるよりもおだてて上手に利用する方が絶対に得策である.

関連書籍

[1] Ambarzumian V. : On the distribution of space velocities of B and F type stars, *Publ. de L'obs. Astron. Leningrad* **7** (1936), 21–35.

[2] Ambrose J.: Computerized transverse axial scanning (tomograpy): Part II. Clinical application, *British J. Radiology* **46** (1973), 1023–1047.

[3] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications, *J. Appl. Physics* **34** (1963), 2722–2727.

[4] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II, *J. Appl. Physics* **35** (1964), 2908–2912.

[5] Cormack A. M.: Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it, *Nobel Lecture*, *Science* **209** (1980), 1482–1486.

[6] Cormack A. M.: Computed tomography: some history and recent developments, *Proc. Symp. in Appl. Math.* **27** (1982), 35–42.

---

9) 鹿野健先生より，純粋数学者でノーベル賞をもらった人は（経済学以外にも）存在するとのご指摘を受けた. 雑誌 “Science” のいずれかの号にその手記が載っているということである. また数学者とノーベル賞の関係を論じた最近の記事として [13] がある.

[7] Groetsch C. W.: *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, 1993（邦訳 サイエンス社, 1996）.
[8] Helgason S. : *The Radon Transform*, Birkhäuser, 1980.
[9] Herman G.T.: *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tompography*, Academic Press, 1980.
[10] Hounsfield G. N.: A method and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation, *Patent Specification* **1283915**, The Patent Office, London, England, 1972.
[11] Hounsfield G. N.: Computerized transverse axial scanning (tomograpy): Part I. Description of system, *British J. Radiology* **46** (1973), 1016–1022.
[12] Hounsfield G. N.: Computed medical imaging, *Nobel Lecture*, *Science* **210** (1980), 22–28.
[13] Morrill J.E.: A Nobel prize in mathematics, *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 888–892.
[14] Natterer F.: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
[15] Shepp L.A. & Kruskal J.B.: Computerized tomography. The new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 420–439.
[16] 斎藤恒雄: 画像処理アルゴリズム, 近代科学社, 1992.
[17] 竹中栄一: コンピュータ断層法, 数理科学 1983 年 7 月号, pp.44–54.

第5章

カオスをめぐって

高橋陽一郎

1. カオスとは

この 10 年余りの間にカオスに関する文献は，数学としての教科書から，他分野の研究者向け，そして一般読者向けの啓蒙書や読み物まで数多く出版されており，その中にはさまざまなおそらく 20 近い数の定義が発見できる．しかし，その中にはあやしげな記述のものもあり，また，デヴァネイの本のようなきちんとした教科書でも tentative な定義あるいは判定条件 (の一部) を述べているに過ぎず，数学としての決定版はまだ存在しない (そこにいたるまでの数学としての研究が成熟していない) というのが筆者の見解である．とりあえず，次の，判ったような判らないような表現を採用し，代表的な絵を示しておく (図 1).

決定論的な力学系は，**自己相似的な構造** (多くは**フラクタル構造**) とともに，**ランダムネス**が内蔵されているとき，**カオス的**であるという．(カオス的であることが数学的に保証されているのは双曲型の力学系であり，双曲型の力学系とすれば，) カオスは系 (system) として安定，すなわち，**構造安定**なものである．さらに，カオスはそのランダムネスゆえに**統計的記述が可能**である．

双曲型力学系に関しては，すでに 1898 年に公表のアダマールの論文「負定曲率空間上の測地流」がある．まだこの時代の数学の論文は (著者にもよるが) 定理，証明の羅列ではなく,「含蓄のある」文章表現であり，この論文を読んでいると，今世紀の第 3 四半世紀における力学系に関する成果の大半をすでに知っていたのではないかという錯覚にさえ陥る．一方，ポアンカレはその「天体力学講義」の中で**自己漸近軌道** (homoclinic orbit, その存在はカオスであるための十分条件の 1 つ) について述べており，また，ポアンカレの再帰定理の発見者でもあり，明確にカオスを見た (もちろん心の目で．カオスが視角化され，関心を集めるにはコンピュータの発達と普及が必要であった) 最初の人であると推測されるが，その時代の関心事ではなかったようである．

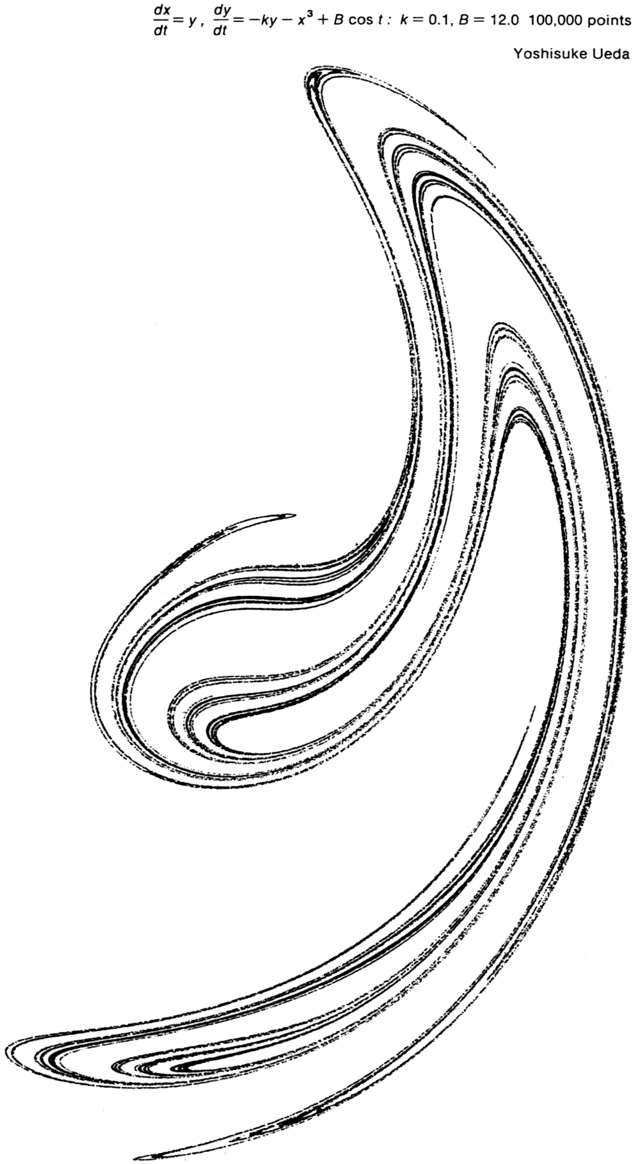


図 1. ストレンジ・アトラクタの例

ランダムネスやカオスを説明するには，数学の話に入る前に，日常的な感覚でのものの見方を確認するところから始めた方がよいであろう．

まず，ある運動あるいは時系列データが与えられたとしよう．例えば，太陽の黒点数の年次変化，株価の変動，天候の変化，渦潮の動き，軒から滴り落ちる雨水の音などを観察するとき，われわれは何を考えるだろうか．おそらくは，まず，変動に長期的な趨勢を見出そうとし，次に，その趨勢からの周期的な変動を予見したりするのがつねであろう．そして周期や趨勢を推測した後に，そこからのズレに気付き，苦渋の末，例えば，惑星の運動に二重周期説を持ち出したりすることになる．

このようなとき，我々の「常識」は意外に共通のものであり，与えられた時系列の中に，まず何らかの規則性を見ようとし，不規則性 (正しくは，不規則性のもたらす法則性) に目を転じるのはかなり後になってからである．力学系のカオスのついて，科学史上のパラダイムの転換であるという壮大な見解から否定的な意見までさまざまなスペクトルがあるが，実験家の間にも決定論的な現象の中の不規則性に目を向けてみる姿勢がかなり常識化したことだけは誰も否定できない事実である．

さて，一定の趨勢を差し引いた後の運動 $x(t)$ は多くの場合，再帰的 (recurrent) である．つまり，その運動がある点を通れば，その任意の近傍を無限回通過する．再帰的な運動は，通常，次のように分類される．

イ)　周期的 (periodic) ：ある $T>0$ に対して，$x(\cdot)=x(\cdot+T)$．つまり，この運動の軌道 $Orb(x)$ は一次元トーラス $\boldsymbol{T}^1$ と同一視できる．

ロ)　準周期的 (quasi-periodic) ：$Orb(x)\cong\boldsymbol{T}^n$ ．

ハ)　概周期的 (almost periodic) ：$Orb(x)\cong\boldsymbol{T}^\infty$ ．

ニ)　その他

その他の中で，規則性から最も遠い不規則なものがランダムな運動である．そのような離散時間の例としては，硬貨投げの試行結果を想起すればよい．

上述の「定義」の絵解きをする前に次節では，まず確率論の成立について触れておこう．

2.　現代確率論の成立

「硬貨を繰り返し投げ続けるとき，表の出る回数と投げた回数の比は表の出る確率 $\frac{1}{2}$ に限りなく近づく．」

このような経験則は**大数の法則**と呼ばれていて，確率論の出発点であった．経験科学としてはこれで事足りるとしても，経験的な意味での確率というもの自体が試行や実験の繰り返しによって推定されるものであり，これを下手に問い詰めると，確率と大数の法則のどちらが先かという鶏と卵のような問題，さらにはランダムネスとは何か，あるいは偶然と必然といった問題にまで行き着いてしまう．

現代確率論は，20 世紀に入ってから 1930 年代までにランダムネスの由来を問うことを放棄することにより，誕生した．古典的な確率論，統計力学，数論などの諸結果を踏まえて，ルベーグ測度論の完成により，確率空間の公理をもとにして大数の法則などが数学の定理 (極限定理) となり[1]，確率変数列に関する極限を確率過程として把握し，確率過程と拡散方程式の関係が見出されたとき[2]，現代確率論は確立したといえよう．

以下，大数の法則についてその事情を少し詳しくみてみよう．

硬貨投げなどのベルヌーイ試行に関しては，「同様に確からしい事象の確率は相等しい」というベルヌーイの原理に基づけば，確率の定義は簡単で明快であり，試行回数が有限である限り，その計算は二項係数等に関する組み合わせ論的考察で事足りる．したがって，これらの場合には 18 世紀にすでに成立していた古典確率論でも今日，**大数の弱法則**と呼ばれている次の定理を証明することが出来た．

定理 1a.　互いに独立で同じ分布にしたがう確率変数列の第 n 項までの見本平均を

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

とするとき，この分布が平均 m をもつならば，任意の正数 ε に対して

$$P\{|Y_n - m| < \varepsilon\} \longrightarrow 1.$$

さらに，見本平均 Y_n の平均 m からの小さな偏差について，次の**中心極限定理**も (さらに，例えばラプラスの「確率の解析的理論」では，局所極限定理と呼ばれるものも) 示されている．

定理 2.　定理 1a の仮定に加えて，この分布が標準偏差 σ^2 をもつならば，

$$P\{a \le n^{\frac{1}{2}}(Y_n - m) < b\} \longrightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

離散的でない分布に関しても上の 2 つの定理は，リーマン積分論などの整備に伴って一般化された．

しかし，冒頭で述べた大数の法則の内容は一般の場合，上の定理 1a によって表現しつくされているだろうか？

冒頭の言明の内容を明確に言い切れば，

「1 つの硬貨を繰り返し投げ続けるとき，見本平均 Y_n が平均 m に収束する」ということである．よって，次のように定式化するのがより妥当であろう．

---

[1] 正規数定理が大数の弱法則の原型 (E.Borel 1909)．大数の強法則は，A.N.Kolmogorov の著書『確率論の基礎概念』(1933) で明確になる．

[2] A.N.Kolmogorov，確率論における解析的方法について，Math.Ann.104(1931), 415-458

定理 1b.　上の定理 1a と同じ仮定の下に，

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} Y_n = m\right\} = 1.$$

この形の定理は**大数の強法則**と呼ばれ，確率空間，つまり，現象を記述するにたるパラメタ (例えば試行結果全体) の空間を設定し，その上に確率を考えて，確率 1 で見本平均 Y_n が平均 m に収束することを主張している．

しかし，このように定式化されたのは，正規数定理や Fokker-Planck 方程式がすでに認知され，ルベーグ積分論が定着した 1930 年代に入った頃，N.Wiener, P.Levy, A.N.Kolmogorov たちの時代であった.「始めに確率空間ありき」と宣言したとき，確率論は，経験科学的な側面，哲学的な呪縛から解放されて，数学の一分野として歩み始める．確率変数列の独立性を (その共通の確率分布測度の) 無限直積測度ととらえ，確率事象とは確率空間上の加算加法的な集合族の元であると考えたときに，ランダムネスゆえの法則性は確かな定理となった．

さらに，中心極限定理を時間パラメタ t をこめて，確率過程に関する

$$n^{\frac{1}{2}}(Y_{[nt]} - m) \longrightarrow W(t)$$

という極限定理としてとらえることにより，ブラウン運動 (またはウィーナー過程) $W(t)$ と結びつき，期待値

$$u(t,x) = E\,[\,f(W(t))\,|\,W(0) = x\,]$$

は熱方程式の解を与えることになる．

このようにして微分方程式やポテンシャル論などの解析の諸分野と確率論の関係が明確となり，その後，マーチンゲール (Doob)，確率微分方程式 (伊藤清 1942. 同じ年に Feynman は経路積分を見出している)，関数空間での積分という認識 (M.Kac)，ウィーナー測度に関する部分積分の発見 (P.Malliavin) 等々を経て，確率解析は大きな展開を見せることになる．

3.　カオスとランダムネス

冒頭で述べたカオスの “定義” の説明をしておこう．

力学系とは，空間 M とその上の変換 $f: M \to M$ の組 (M, f) のことであり，双曲型力学系とは，公理 A 系の類を指しており，各点で (大域的に見て) 伸びる方向と縮む方向がある力学系をいう．ここでこの 2 つの方向は横断的に交わり，接することはないものと要請する．それゆえに，系に小さな摂動を加えても，双曲型構造が保たれ，構造安定性をもつ．

このような力学系の最も簡単な例は，パンこね変換である．この例では M は正方形で，f の式は省くが図 2 のように，横方向は 2 倍に伸ばし，縦方向は $\frac{1}{2}$ 倍に縮める変換である．この変換 f のもとで面積は保存され，また，f を繰り返すと，

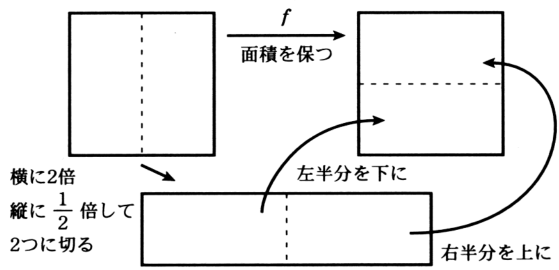


図 2　パンこね変換（Bakers transformation）

初期にどんなに近くにあった 2 点も (横座標が一致しない限り) 必ず大きく離れていく (**初期値に関する鋭敏な依存性**)．また，パンをこねれば混ざって均質化していくのと同様に，この変換は混合的 (mixing) である．

さらに，ある点 P が正方形の右半分にあることを R，左半分にあることを L で表して，これを用いて**粗視化**して，P の変換 f による軌道

$$\cdots, \mathrm{P}, f\mathrm{P}, f^2\mathrm{P}, \cdots$$

から，例えば

$$\cdots, R, R, L, \cdots$$

のような 2 文字列 R, L の列という粗い情報を取り出すことができる (ここで左側にも $\cdots$ を書いたのは，f による逆像も考えられるからである)．逆にこのような文字列が任意に与えられれば，それを実現する点 P が**復元可能**である (実際，R を 0，L を 1 と読み替えれば，この文字列の右半分は点 P の x 座標の 2 進展開，左半分は y 座標の 2 進展開に対応する)．

一般の双曲型力学系 (M, f) でも，伸びる方向と縮む方向の存在から同様の性質が成り立つから，次のことがわかる．

1)　この系は (粗視化して R, L を観察しただけでわかるように) **軌道の多様性**をもつ．そして，軌道の多様性を測る量である**位相的エントロピー**は正となる．

2)　複数個の適切な写像 [パンこね変換の場合は，右または左半分への縮小写像し] で縮小して相空間 M をそれ自身の中に変換 f と整合的に埋め込むことが

できる．よって，**自己相似的な構造**をもつ (下の図 3 のパイこね変換を考えれば，フラクタル構造の出現の理由が容易に想像できることと思う)．

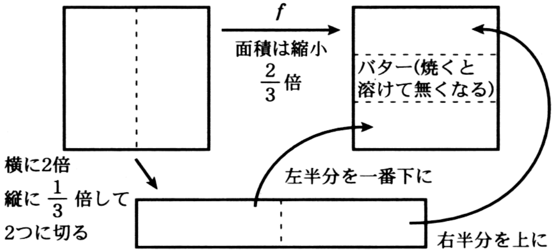


図 3　パイこね変換

さらに，1) を見直してみると，次の意味でカオス力学系には**ランダムネスが内蔵**されていて，これによりカオスは統計的記述が可能となる．また，これを利用した疑似乱数の生成法などの研究も進んでいる．

3)　適切な分割 α [パンこね変換の場合は右半分と左半分への分割] を選び，適切な確率測度 μ [面積] を選べば，粗視化された情報 [R, L の無限列] はベルヌーイ系となる．一般に，(相空間上のルベーグ測度に関して正測度をもつ集合上で) ほとんどすべての点を出発点とする軌道上での長時間平均 μ は出発点に依存せず，これに関して粗視化された情報はベルヌーイ系と同型となることが知られている．

カオス力学系は自然科学や工学の様々な分野に影響を与えたが，とくに物理学に対しては，Ruelle-Takens の定理 [3] が大きなインパクトを与えた．乱流などのもつ複雑さは有限自由度の世界では存在し得ないものであり，「乱流は次々と無限個のモードが励起されて生ずる」(Landau-Hopf) という描像 [4] は，この定理の前にそのドグマ性を露呈することになる (もちろん，最終的な結論は今後の実験による)．このような意味では，カオスはパラダイムの転換をもたらしたといえよう．この際，ロレンツ・プロットなどの発見はランダムネス抽出のための支点を提供した．そして，力学系のカオスは，“決定論的なランダムネス” の存在を広く認知させることとなった．

[3] D.Ruelle and F.Takens, Comm.Math.Physics 20(1971) によれば，少なくとも T^3 上の準周期運動からは，generic に，双曲型力学系への分岐が生ずる．

[4] 例えば，ランダウ=リフシッツ「流体力学」第 3 章．これを力学系の分岐としてみれば，$T^1 \to T^2 \to T^3 \to \cdots \to T^n \to T^{n+1} \to \cdots$ となる．

4. エントロピーと大偏差原理

力学系のカオスの問題は，当初から非平衡統計力学のモデルとして位置づけられた．上述の Ruelle-Takens の仕事も，倍周期化分岐の集積点に関する Feigenbaum の臨界現象もその例である．さらに，カオス的な力学系 (M, f) のアトラクタを記述する確率分布も，**ギッブスの変分原理**と類似の変分原理

$$I(\mu) := \chi^{+}(\mu) - h(\mu) \longrightarrow \min\,(=0)$$

で特徴づけられる．ここで，$h(\mu)$ は不変確率測度 μ に関する f のエントロピー，$\chi^{+}(\mu)$ は正のリャプノフ指数の和である．これを数学的に証明するために大偏差理論 [5] の力学系版 [6] を用いるのが筋がよいが，その結果を見直してみると，シャノンのエントロピー

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

の概念から，さらに，ボルツマンによるエントロピーの導入まで遡ることになる．

大偏差原理とは，中心極限定理に次ぐ第3の極限定理である．後者が，見本平均 Y_n の平均 m からの小さな偏差を見るために $n^{\frac{1}{2}}$ 倍に拡大して $n^{\frac{1}{2}}(Y_n - m)$ の分布の漸近挙動を記述するものであったのに対して，前者は，大偏差，つまり，$Y_n - m$ 自身の分布の漸近挙動を記述するものである．これが系統的に着目されるようになったのは比較的最近のことであるが，1930 年代のクラメールまで遡れる素朴で基本的な視点である．そして，最も簡単な公平な硬貨投げの場合でも，この漸近挙動は次の形を取り，これがエントロピーに支配される極限定理であることがわかる．さらに，これはシャノンのエントロピー H の形の導出の一方法と見ることもできる．

$$\frac{1}{n}\log P\{a \le Y_n - m \le b\} \longrightarrow \max_{a \le p_1 \le b}\left\{-\sum_{i=1}^{2} p_i \log p_i - \log 2\right\}$$

この極限定理の証明は容易で，左辺を二項係数を用いて展開しておき，スターリングの公式

$$n!/(2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty)$$

を適用すればよい．ところで，スターリング自身が示したのは形式的な漸近展開であり，この形のスターリングの公式はラプラスにより，積分

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

---

[5] 1970 年代後半に Donsker と Varadhan により確立された．

[6] Y.Takahashi, Taniguchi Intern. Symp. on Stoch. Analysis, Katata and Kyoto 1982, pp.437-467, Kinokuniya/North Holland, 1983

の $n \to \infty$ での漸近挙動を調べることにより証明されたものであると言う (Erdelyi,Asymptotic expansion, Dover)．詳細は略すが，大偏差原理は経路空間におけるラプラス型積分の漸近挙動と密接な関係にあり，この歴史は興味深い．

100年以上前に L.Boltzmann は，今に至るも解決を見ていない，見果てぬ夢「多粒子 (無限粒子) 系の運動から熱力学の諸法則，とくに，非可逆性を導出すること」を実現するために，気体分子の運動からある仮説 (assumption of molecular chaos) をもとにボルツマン方程式を導出し，H 定理を証明してみせた．しかし，これは，Zermelo その他の人々から手痛い反論を受ける (現在では，Broadwell モデルがその反例であることも証明されている (内山耕平))．その強力な論拠は，不変確率分布をもつ力学系に対するポアンカレの再帰定理 (reccurence theorem) という当時の最新結果であった．再反論するためにボルツマンは，あるカノニカル分布が平衡分布として実現するのは等エネルギー面に入る状態の数 W が最も多いからであると主張し，W を Anzahl der Komplexitionen と呼び，有名な公式

$$S = k \log W$$

の原型を与えた．大偏差原理の形を見ると，これはボルツマンの考え方の延長線上にあるものと考えることもでき，感慨深いものがある．

参考文献

[1] R.L. デヴァネイ :『カオス力学系入門』(後藤訳) 共立出版 1987.
[2] 池田研介・高橋陽一郎 : カオスの数理と物理,『物理学の最先端常識 II』第8章　共立出版 1988.
[3] 高橋陽一郎 : 力学系における決定性と非決定性,『数理物理学の展開』第2章　東京図書 1988.
[4] 高橋陽一郎 : 'コルモゴロフの数学' の断片，日本数学会誌「数学」42巻 (1990), 177-182.
[5] 長島弘幸・馬場良和 :『カオス入門』培風館 1992.
[6] D. ルエール :『偶然とカオス』(青木薫訳) 岩波書店 1993.
[7] 高橋陽一郎・志賀浩二 : 対談「確率論を巡って」日本評論社
[8] S.R.S.Varadhan, Large Deviations and Applications, SIAM, 1984.
[9] M.Kac, Integration in Function Spaces and Some of Applications, Acad. Naz. Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.

第6章

ゆらぎの解析 今昔

飛田武幸

0.　ゆらぎの数学一世紀

ゆらぎ（揺らぎ）といえばローソクの炎とか，陽炎，風にそよぐ葦，舟の揺れ，台風の進路など，あるいは拡散現象やぞうりむしの進路を思い出すであろう．

ところで，ゆらいでいる自然現象の典型としてのブラウン運動が数学の対象となったのは今世紀のはじめ頃（A. Einstein,1905; 他）であった．それから約一世紀の間，ゆらぎに対する数学的アプローチは解析学をはじめ数学の諸分野の助けをかりて，確率論を大成させ，科学の諸分野との強力な連帯のもとに着実に成果を挙げてきた．

ゆ　ら　ぎ



本稿では,「確率論」というよりは，むしろ関数解析学と表裏一体とみられる「ゆらぎの解析」についての今世紀における諸成果を，無限次元解析学の立場から概観し，さらにこの分野の 21 世紀への期待像をさぐってみたい．

特に，ヨーロッパにおいて，前世紀の終わり頃から盛んになって，今世紀の半ば過ぎまで，隆盛を極めた古典関数解析学の研究における重要なアイディアの多くが，現代のいわゆる確率解析学の中において再び開花しているのを見るのは興味深いことである．

その流れは，Volterra-Fréchet-Hadamard-Lévy と受け継がれた関数解析に始まって，Wiener 空間上の解析へと発展したが，さらにその流れはソビエト学派（？）による近代関数解析の中において，さらに広く現代確率過程論の中に見いだすことができる．ここでは，それらの内容のいくつかを取り上げて，温故知新の故知にならうことにしたい．すなわち，伝統的な考えや，それから得られた興味深い幾多の成果が，現代のホワイトノイズ解析の中によみがえって重要な位置を占めているのを見ることができるのである．

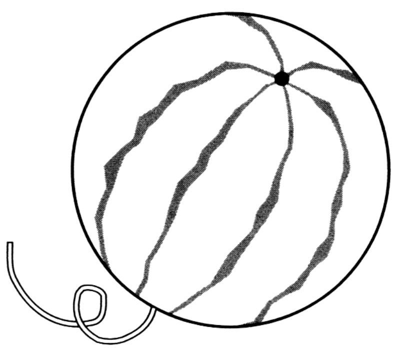
そこで，まづそれらの事実が我々の解析の中でどのような形で現れるかを見よう．その鍵はホワイトノイズの汎関数を古典関数解析で扱った汎関数に移す変換，すなわち S 変換にあることに注意したい．

以下，事実に即して述べよう．

1.　関数空間上の測度，ホワイトノイズ解析

よく知られているように，無限次元ベクトル空間，例えばヒルベルト空間上のルベーグ式の（運動で不変な）測度は存在しない．そんな無限次元空間上で微積分をやろうとしたとき，微分はともかく，積分を考えるにはどうしても測度に相当するものをもってこなければならない．単位球をとってみよう．内部に半径 $1-\varepsilon$ の球を考えるとき n 次元のときなら単位球との体積の比は $(1-\varepsilon)^n$ となる．n が無限に大きくなると，この比は 0 に近づく．言い替えると無限次元では球の体積は表面に集中する．

また極座標を使うと体積は赤道に集中することもわかる．そんなものが無限次元



無限次元ですいかを貰ったら中は空っぽ

の一様な測度である．ここで単位球は各方向に半径が 1 であり，二乗可積分関数のなすヒルベルト空間の中には収まりきれない．そこで，より広いベクトル空間，具体的には超関数の空間 E^* をとろう．その上に導入された回転（無限次元回転である！ 詳しい定義はあとで）で不変な確率測度は原点における δ -測度と，平均が 0 で種々の分散をもつガウス測度の重ね合わせであることが知られている．よって，ergodic property (エルゴード性) を仮定すれば，単一のガウス測度となる．

こうして，簡単に

(1) 回転不変であり，

(2) ergodic

である超関数空間 E^* 上の確率測度はある分散 σ^2 をもつガウス測度であるということがわかる．このようなことは本質的には今世紀のはじめの頃から認識されていたようである．(例えば文献 [5] 参照.)

話を単純にするため分散を 1 にしよう．そのとき μ は E^* 上の標準ガウス測度，すなわちホワイトノイズ測度であり，その特性汎関数 $C(\xi)$ は次のように表される．

$$C(\xi) = \int_{E^*} \exp[\, i\langle x,\, \xi\rangle\,] d\mu(x) = \exp\left[-\frac{1}{2} \parallel \xi \parallel^2\right].$$

こうして，測度空間 (E^*, μ), そしてその上の複素ヒルベルト空間 $L^2(E^*, \mu) = (L^2)$ ができる．その空間を基礎にした解析はいろいろな意味で標準的と考えることができる．それが今から考えようとするホワイトノイズ解析である．

2. 新生過程としてのホワイトノイズ

上で我々の解析を標準的なものとして位置づけた理由の一つは次のようである．確率過程 $X(t), t\varepsilon R$, の構造をきめようというときには，Lévy の stochastic infinitesimal equation が重要な指針となる．それは次のような形式的な方程式である．微小区間 $[\,t, t+dt\,)$ での $X(t)$ の変分 $\delta X(t)$ について

$$\delta X(t) = \phi(\, X(s), s \le t;\, Y(t),\, t,\, dt\,).$$

ここで ϕ はランダムでない関数であり，また $Y(t)$ はいわゆる新生過程または innovation と呼ばれるものである．この $Y(t)$ は 過去の $X(s), s \le t$, とは独立で，微小区間 $[\,t, t+dt\,)$ で $X(\cdot)$ が獲得する情報をすべて含むものである．

注意すべきことは $\{Y(t),\, t\varepsilon R\}$ が連続無限個の独立確率変数の系では**ない**ことである．それは $X(t)$ の微小時間 dt 間の増分の成分であって過去と独立なものである．だから $Y(t)$ を t の進行に従って集めれば，あるいは積分すれば加法過程と

なる．積分は $\int^t Y(s)\sqrt{ds} = Z(t)$ とすべきであろう．この $Z(t)$ は $X(t)$ と新生過程を共有する．そのような $Y(t)$ こそが確率過程の解析における**素子**となるものである．

こうして目的とする解析の出発点は加法過程になることがわかった．この過程の時間についての確率連続性と増分の分布についての時間的な一様性などを仮定しよう．そのようなものは Lévy 過程と呼ばれ，その Lévy-Itô による分解はよく知られている．その重要性を強調し，かつそれを素なものに分解して特性を明かにした P.Lévy,[3] 1937 と K.Itô,[2] 1942 の業績は高く評価されるべきであろう．

もし Lévy 過程の見本関数の連続性を仮定すれば，分散の選択の自由性を除き，ブラウン運動（$B(t)$ と書く）となってしまう．その時間微分としての $Y(t)$ はホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ に他ならない．

これでホワイトノイズ解析の出発点が明らかになった．

3.　ホワイトノイズの超汎関数

ランダムな量を記述するため変数となる確率素子としてホワイトノイズをとる立場が明かになったので，次はどのような関数を扱うかが問題となる．解析学の常套手段としてまず多項式からの出発がある．$\dot{B}(t)$ 達の多項式を考えるとき，$\dot{B}(t)$ の見本関数が超関数であることに注意しなければならない．各 t で値をきめることも，ましてやそれらの積を作ることも通常の解析では許されない．同じく変数を $\dot{B}(t)$ 達として，指数関数とか，デルタ関数などはなおさら定義は困難である．それらの困難さを克服するために renormalization の手法を用いて超汎関数の空間が導入されたのである．後に Kubo-Takenaka により我々の確率解析に一層好都合な超汎関数のクラスが定義された．それは，ある自己共役な作用素の第二量子化の方法を用いるもので次の Gel'fand triple のメンバーとしてとらえられる：

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$$

ここで，(S) はテスト汎関数の空間，$(S)^*$ が求める超汎関数の空間である．1 次元の類似でいえば，Schwartz 空間，$L^2(R)$, Schwartz 超関数空間，の関係に他ならない．扱う問題により $(S)^*$ よりも広い空間を用意することがあるが，上の方法は，そのときの拡張法をも示唆している ([11]).

4.　回転群

古典関数解析と我々の解析との基礎にあるもう一つの概念は無限次元回転群である．ホワイトノイズ測度 μ は，その特性汎関数の形からわかるように，E^* の回

転群 $\boldsymbol{O}_\infty$（無限次元回転群）の作用では不変に保たれる．むしろ μ が回転群により特徴づけられているのである．それから派生した重要な内容として

1) ホワイトノイズ解析は無限次元回転群から生まれる調和解析という側面をもっている，

2) この解析は，有限次元で近似される部分と，真に無限次元的で有限次元的なものでは近似できない部分とがあるが，両者は $\boldsymbol{O}_\infty$ の部分群によって区別される．

3) 確率場（次節で述べる）の変分を扱う場合に，パラメータの許容される変換を $\boldsymbol{O}_\infty$ のある種の部分群 (whiskers のなす部分群）の作用に限定して，その Lie 群としての構造を利用した系統的な解析を実施することができる，

などがある．

実際，$\boldsymbol{O}_\infty$ の部分群のうちには，有限次元回転及びその帰納極限として表される部分群があるが，一方そのような極限としては表せないものがある．それには当面次の二種類の部分群をあげることができる．

(i) **Lévy 群**．([5],[10])

空間 E の完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ を固定する．π を自然数の自己同型でその密度 $d(\pi) = \lim_N \sup \frac{1}{N}\#\{n \le N ; \pi(n) > N\}$ が 0 となるものとする．このとき $\xi = \sum_n a_n \xi_n$ にたいして

$$g_\pi \xi = \sum a_n \xi_{\pi(n)}$$

によって E の線形変換 g_π を定義する．このような変換の集合で $\boldsymbol{O}_\infty$ の部分群をなすものを Lévy（部分）群という．

Lévy 群の元の中には有限次元回転で近似できないものが無限に存在する．

例．自然数の自己同型 π で

$$\pi(2n) = 2n-1,\ \pi(2n-1) = 2n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots,$$

となるものをとる．このとき g_π は有限次元回転では近似できないことがわかる．証明には，たとえば average power に及ぼす影響を考えればよい．

Lévy 群に呼応して Lévy ラプラシアンがある．それは完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ を適当に選び

$$\Delta_L = \lim_N \sum_1^N \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}$$

で定義される．ホワイトノイズ解析では，それは超汎関数の空間に効果的に作用し，有限次元におけるものの極限である Laplace-Beltrami 作用素と役割を分担している．

一方 Gross のラプラシアンもあるが，singularity の扱いにおいて上の二つのラプラシアンとは異なるもので，別な解析的意義を持っている．

(ii) **Whiskers.**

パラメータ空間 R^d の微分同型を ψ とする．ξ の変換 g_ψ を

$$g_\psi \xi(u) = \xi(\psi(u))\sqrt{|\psi'(u)|}$$

で定義する．ψ を適当に選べば g_ψ は $\boldsymbol{O}_\infty$ の元となる．

一般に，このような変換のなす $\boldsymbol{O}_\infty$ の部分群の構造は複雑になる．しかし，微分同型のなす 1-パラメータ部分群を考えるとき，それから得られる $\boldsymbol{O}_\infty$ の 1-パラメータ部分群にたいしては幾らかその構造を知ることができる．

微分同型の族 $\{\psi_t\}$ が

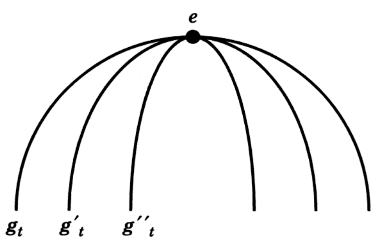
$$\psi_t \cdot \psi_s = \psi_{t+s}$$
$$\psi_t \longrightarrow I \,(\text{恒等変換}), \quad (t \longrightarrow 0)$$

をみたすとする．これに呼応して

$$g_t : (g_t\xi)(u) = \xi(\psi_t(u))\sqrt{|\,\psi_t'(u)\,|}$$

が定義される．各 t について g_t が $\boldsymbol{O}_\infty$ の元であるとしよう．群の演算について

$$g_t g_s = g_{t+s}$$



whisker はひげのよう (吉沢)

は明らかである．そこで連続性

$$g_t \longrightarrow I, \quad (t \longrightarrow 0)$$

を仮定する．そのような $\{g_t\}$ を whisker と呼ぶ．**whiskers** のなす部分群も真に無限次元的なものであり，明らかに Lévy 群とも異質なものでパラメータ空間の幾何学的構造に直接関係している．典型的な例として変数 u の平行移動による shift や dilation がある．

5. 確率場

確率場についてはアイディアを古典解析から掘り起されることが多く revisit したいところである．

ここで扱う確率場はパラメータが多次元ベクトルのときか，または多様体のときで，前者は $X(t), t\varepsilon R^d$，と書き，後者は $X(C), C \in \boldsymbol{C}$，のように表す．それらの取り扱いもやはり素子で表すことから始まる．

$X(t)$ については，t の動きに応じた従属性の変化のほかに，多様体 C 上での t についての加重平均とか，C 上の t についての $X(t)$ の値が与えられたときの条件つき平均値など，C をパラメータにする確率場を構成して従属性を調べることが多い．したがってここでははじめから $X(C)$ について C が動くときの行動を考えていくことにする．

ここで扱う確率場 $X(C)$ についての一般的な仮定は，それがホワイトノイズ x の汎関数として $(S)^*$ の元としていることである．

また話を具体的にするため C は R^d の中の $d-1$ 次元多様体で $d-1$ 次元球面に微分同型であるとする．$\boldsymbol{C}$ はそのような C のクラスで，$\boldsymbol{C}$ に作用する適当な同型作用のなす群（問題により適当に選ぶ）が推移的 (transitive) に働いているものと仮定する．

確率場 $X(C)$ の変分を議論するときのアイディアは，確率過程に対する Lévy の stochastic infinitesimal equation の拡張となる次の式であろう．勿論これも考え方を示す形式的な方程式である．

$$\delta X(C) = \phi(X(C'), C' \leq C; Y(s), s\,\varepsilon C; C, \delta C).$$

ここで，記号 $C' \leq C$ は C' が C の内部にあることを示す．

この立場からの確率変分に移る前に古典関数解析における結果を見よう．

(1)　何といっても Hadamard 方程式 をあげなければならない．いま $G(C, x, y)$ を C で囲まれた領域に関する Green 関数とする．C の微小な変形 δC に対して

$G(C,x,y)$ の変分は

$$\delta G(C,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial G(C,x,s)}{\partial n}\frac{\partial G(C,s,y)}{\partial n}\delta n(s)ds$$

で与えられる ([1], [5])．この方程式は G をウエイトとして領域内でホワイトノイズを積分した確率場などへの直接の応用は効果的である．

(2) 次に著名なものは Euler 方程式である．汎関数

$$J[f] = \int_a^b F(f,f',u)du$$

の停留値は次の Euler 方程式の解によって与えられる：

$$F_f - \frac{d}{du}F_{f'} = 0.$$

これも確率場への応用は豊富である．J が作用積分の場合に Feynman の経路積分を導入するとき，あるいは J がエントロピーの時間積分のとき Lotka-Volterra 方程式を導く場合など，ゆらぎの解析の応用は随所に見られる．

(3) Lévy の関数解析（[5] 参照）の中に (1) の詳しい取扱いのほか C の汎関数の変分に関する多くの類型が見られる．それらの結果の確率場への応用は限りない．例えば C をパラメータにもつ拡張されたランジュバン方程式 や，マルチンゲールの拡張が同じく古典関数解析における Volterra form の適用につながったりして，今後に多くの問題を提起している．

まとめ

最後に，古典関数解析を一つの支えとし，一方では“ゆらぎの解析”として成長してきたホワイトノイズ解析の主な特徴をあげておこう．

1. 確率素子の導入

ゆらぐ現象を記述するときに基本となるものとしてホワイトノイズを選んだ．それは時空パラメータの各点で独立で一様に拡がった infinitesimal な確率変数の系としての素子と考えられる．それは確率過程等のランダム関数の変数系として取り上げられた．それはまた，確率過程の新生過程のアイディアからきた加法過程の微分として位置づけられる素子でもある．

このようにとらえたとき，自然に素子の汎関数（超汎関数）のクラスができて，さらに素子を変数とした微分と積分が実行できる．このような解析が一つの変換を通して古典関数解析とつながり，大きな体系を形作ることとなった．これは**真の無限次元解析**というべきものであり，そこからは，最近盛んになってきた量子確率解析との共生の道もひらけているのである．

2. 無限次元回転群

定義としては，我々の解析に結びつく，V.Volterra, P.Lévy によるもの，及び H.Yoshizawa による一般的な定義を採用したい．その部分群のうちで，Lévy 群と Whiskers のなす群は真に無限次元的なもので，ホワイトノイズ解析はそれから起こる調和解析という側面をもつことを知った．そこでは有限次元的なものでは近似できない内容が主役を務めており，そこで超汎関数のクラスは適切な場を提供している．

3. 確率場の変分

時空多次元のパラメータ t をもつ確率場，あるいは多次元ユークリッド空間の中を動く多様体 C に依存する確率場 $X(C)$ の研究はゆらぎの解析とみて今後の課題が多い．特に後者については C の変形に応じて豊富なな従属性を呈示し，またそれによりかくれた相関関係が引き出され，通常の確率過程では現れない従属性のあり方が見られる．応用として，物理学や生物学におけるゆらぐ現象の詳しい性質を記述するような理論も期待できて夢多き発展分野である．

関連書籍・論文

[1] J.Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Libraire Scientifique A.Hermann et Fils, 1910.

[2] K.Itô, On stochastic process (I). Japanese J. Math. 18 (1942), 261 -301.

[3] P.Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier- Villars, 1937.

[4] — , Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier- Villars, 1948; 2ème ed. 1965.

[5] — , Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars1953.

[6] — , Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions, Univ. Calif. Pub. vol.1, no.12, 1953.

[7] —, Jacques Hadamard, sa vie et son oeuvre - Calcul fonctionnel et questions diverses. La vie et l'oeuvre de Jaques Hadamard (1865-1963),1967.

[8] V.Volterra, Opere Matematiche. Memoire e Note. vol.5, Roma Academia Nazionale dei Lincei, 1962.

[9] — , Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, Dover Pub. Inc. 1959.

[10] T.Hida, Brownian motion. Springer-Verlag, 1980.

[11] T.Hida, H.-H.Kuo, J.Potthoff and L.Streit, White noise. An infinite dimensional calculus. Kluwer Academic Pub. 1993.

[12] T.Hida, White noise analysis. IIAS（国際高等研究所）Reports no.1995-001.

[13] H.-H,Kuo, White noise distribution theory. CRC Press, 1996.

[14] N.Obata, White noise calculus and Fock space. Lecture Notes in Math. #1577, Springer-Verlag, 1994.

第7章

楕円曲線の数論の歴史

足立恒雄

本稿は津田塾大学で開催されたシンポジウム『20 世紀数学』('95 年 11 月) における講演と京大数理解析研究所における研究集会『代数的整数論とフェルマー問題』('95 年 12 月) における講演をまとめ，加筆修正したものである.

楕円曲線の歴史と一口に言っても膨大・多岐に亙るから，ここでは (1)Fermat の先駆的研究，(2) 楕円曲線の群構造発見を巡る歴史，(3) フェルマー問題の Frey による谷山予想への還元，の三つに絞って考察することにする.

1. 楕円曲線論先史

Diophantos(AD 3C, [3]) は『算術』と呼ばれる著書 13 巻を著した. その内容は 2 次曲線上の有理点を求めることを要求する問題集で，現在では 6 巻までが遺されている.『算術』で扱われている例をいくつか下に挙げる：

例 1-1 与えられた平方数を二つの平方数の和に分けよ. 例えば,

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

の (有理) 解を求めよ.

例 1-2 与えられた数が二つの平方数の和であるとき，これを別の二つの平方数の和に分けよ. 例えば，$13 = 2^2 + 3^2$ を知って

$$13 = x^2 + y^2$$

の別の (有理) 解を求めよ.

例 1-3 2 連方程式

$$a_1x + b_1 = \square, \quad a_2x + b_2 = \square$$

例えば,

$$x+2=\square,\quad x+3=\square$$

の（有理）解を求めよ.

Diophantos の扱った非特異 3 次曲線は

$$y^2=x^3\pm 2$$

の二つだけで，これはたまたま解がうまく見つかった場合であったといえる．3 次曲線に対する，Fermat の言う Bachet の方法（接弦法）にあたる手法の適用はみられない．Weil などが Diophantos を接弦法の始祖のようにいうのは読み込みすぎではなかろうか.

Diophantos の『算術』は，上の例でわかるように，問題は整数係数で与えられているとしても，もっぱら「有理数解」を求めた著作で，整数解が見つからない場合に，やむなく有理数解を求めているというのではないことは注目に値する.

なお，最近見つかった『算術』の一部（アラビア語テキスト，9 世紀頃の写本と考えられる：テキストならびに英訳は [25]）には 3 次以上の方程式が頻出するが，非特異 3 次曲線の問題に還元されるものは見当たらない．従って，散逸した『算術』の諸巻にはさらに高度な問題が扱われていたという可能性は薄いだろう．アラビア語版テキストが真正の『算術』であるかどうか，いくらか疑問の余地もあるが，いずれにしても，不定方程式の伝統がアラビアに受け継がれていたことははっきりしている.

2.　楕円曲線論の始祖 Fermat

Fermat が著した有理点に関する著作は，ギリシャ語原点から Bachet が訳した『算術』の余白に書き込んだ《Observationes（欄外書き込み集）》([4]) の他に，心酔者である神父 Jacques de Billy に書かせた《Doctrinae Analyticae Inventum Novum》([5]；Inv. Nov. と略記する) がある．この Inv. Nov. は全編，楕円曲線上の有理点の考察に当てられた長大な論文である．Fermat の扱った例をいくつか挙げてみよう.

例 2-1(Obs. 3) 二つの立方数の和である数を他の二つの立方数の和に表せ：

$$x^3+y^3=a\neq 0$$

の解が一つ与えられたとき他の解を無数に求めよ.

例 2-2(Obs. 45)（有理）数を 3 辺とする直角三角形の面積は平方数ではありえない：

$$x^2+1=\square,\quad x^2-1=\square$$

は解を持たない.

例 2-3(Obs. 16) 3 連方程式

$$x+1=\square,\quad 3x+1=\square,\quad 8x+1=\square$$

の解を求めよ.

例 2-4(Inv. Nov., Pt. 1, 15)　2 連方程式

$$x^2+x+2=\square,\quad x^2+3x+3=\square$$

の（$x=-2$ 以外の）解を求めよ.

例 2-5(Inv. Nov., Pt. 3, 12) 不定方程式

$$x^4+4x^3+10x^2+20x+1=\square$$

の（$x=-3$ 以外の）解を求めよ.

例 2-6(Inv. Nov., Pt. 2, 11) 3 連方程式

$$x+1=\square,\quad 2x+1=\square,\quad 3x+1=\square$$

は（$x=0$ 以外に）解を持たないことを示せ.

例 2-7(Inv. Nov., Pt. 2, 10) 3 連方程式

$$5x+1=\square,\quad 16x+1=\square,\quad 21x+1=\square$$

は無数に解を持つ.

楕円曲線 E 上の有理点 P が与えられたときに，点 P における接線が再び E と交わる点を求めることによって E の新しい有理点を得る方法を Fermat は Bachet の方法と呼んでいる（我々は接弦法とも呼ぶことにする）. 従って，これは Fermat の独創ではないが，数々の問題に適用して楕円曲線の数論と言える理論にまで発展させたのは，間違いなく Fermat の功績である.

上掲の諸例はすべて，$x=0$（あるいは x を $1/x$ と変数変換して $x=0$ としたもの）を与えられた有理点として持っている. しかし，Fermat は 0 を数とは見な

していなかった．また，例 2-4,2-5 は負の数が予め解として与えられているが，負数もこの時代には数と認められていなかった．従って，Fermat は意識してはいなかったとしても，現代の目からみれば Fermat の扱った問題はすべて，視察で容易にわかる有理点を持つ楕円曲線上に有理点が無数にあるか否かを問う問題であったことがわかる．

Fermat の扱った 3 連方程式は

$$Ax+1=\square,\quad Bx+1=\square,\quad Cx+1=\square \tag{2.1}$$

という形にまとめることができる．まず

$$x=Ay^2+2y$$

と置いて，(2.1) の第 1 式に代入すれば，左辺は平方数となる．そこで第 2，第 3 の式を解けば良いことになるが，それは

$$ABy^2+2By+1=u^2,\quad ACy^2+2Cy+1=v^2 \tag{2.2}$$

である．これは例 2-4 で出てきた 2 連方程式である．(2.2) の 2 式の差を作ると，

$$(B-C)y(Ay+2)=u^2-v^2=(u+v)(u-v)$$

となる．そこで

$$u+v=(B-C)y,\quad u-v=Ay+2$$

として，u,v を求めるというのが，2 連，従って 3 連方程式を解く **Fermat の方法**である．この方法によれば，

$$u=\frac{A+B-C}{2}y+1$$

であるから，

$$A+B=C \tag{2.3}$$

の場合にはうまくいかない．上掲の，例 2-6,2-7 の場合がそれに当たる．このうち，2-6 には解がないことの証明を持っていると Fermat は主張している (が，その証明は残されていない)．しかるに，2-7 は無数に解を持つと指摘している．このように，Fermat は，今でいう楕円曲線の有理点問題に関心を持ち，深い研究をしていたのであった．

(2.3) の場合に Fermat の方法が何故うまくいかないのかは Zagier([37]) により解明された．まず，よく知られているように，曲線 (2.1) は

$$y^2=(Ax+1)(Bx+1)(Cx+1) \tag{2.4}$$

と双有理同値である．楕円曲線 (2.4) 上には自明な有理点 $P(0,1)$ がある．また，$x=-1/A, -1/B, -1/C$ に対応する点は位数 2 を持つ有理点である．Mazur の定理 ([18]) を適用すると，点 P が有理 torsion であるための必要十分条件が簡単に出てくる．全部で 4 つあるその条件の一つが (2.3) というわけである：その他の条件は $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$ など，無理式で与えられる．もちろん，点 P が torsion 点であっても，他に無限位数を持つ有理点が存在する場合がありえるわけで，その 1 例が例 2-7 である．

なお，Fermat は FLT の $n=4$ の場合，即ち

$$x^4+y^4=z^4$$

には自明でない解が存在しないことを証明している．この曲線の種数は 3 であるけれども，実際には

$$x^4+y^4=z^2$$

という種数 1 の曲線に問題を還元して解いているわけで，あの「悪夢のような一瞬」を除けば，一度たりとも種数 1 という守備範囲から逸脱した考察をしたことはなかったという Weil の指摘は説得的である．

3. 群構造の発見

種数 1 の曲線と楕円関数との関係に初めて気が付いたのは Jacobi([15]) であろう．Euler の残した 4 次曲線の有理点問題，つまり，例えば例 2-5 のような曲線上に，一つ有理点が与えられたとき，次々と他の有理点を求める問題を楕円関数を使って（具体的に解いてみせたわけではないが）一般的に解く原理を説明したのである．この論文の最後に，こういった原理が Euler を初めとする楕円積分の開拓者にわからなかったはずはないと指摘しているが，実際には Euler は不定方程式論と曲線論，積分論を結び付けて考えたことは一度もなかったのである．

代数曲線の解析関数によるパラメトリゼーションを研究したのは Clebsch が最初である．例えば，**種数** 1（この名称も Clebsch による）の曲線が楕円関数によってパラメトライズされることを示した ([1])．これを使って，例えば 3 次曲線の変曲点の個数や，3 点の共線条件など，古典幾何学の数多くの問題が解かれた．

Poincaré は代数体上定義された代数曲線の有理点の集合について考察した．論文 [23] では楕円関数によるパラメトリゼーションを使って，パラメータ $u_1,\cdots,u_n$ から基本操作（接弦法）を繰り返して得られる点は

$$\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 1 \pmod 3$$

であると主張している．同じことが（$n=3$ の場合に）Hurwitz([13]) によっても指摘されている．この表示法を見てもわかるように，ここには楕円曲線が群をなすという意識はまだ見られない．一点 **O** を定めて，この **O** を中心として対称点を取るという操作（パラメータでいえば，u に $-u$ を対応させる操作）を基本操作に含めることを除外しているのが，群構造に気付かれなかった理由のように思われる．Poincaré は点の個数 n を増やしていけば，すべての有理点が尽くされるようにできると暗黙のうちに認めていて，そういう n の最小数を**階数**というと定義している．

Hurwitz([14]) は Poincaré と同じ考察から始め，特に，有理点の集合 $E(\mathbf{Q})$ が有限の場合を扱っている．この際には,「演算が閉じているので $E(\mathbf{Q})$ は群をなす」ということが明白に指摘されている．また有理点を持つ 3 次曲線は座標変換によって Weierstrass の標準形に直せることも述べられている．このことを使って，

$$x^3+ay^3+bz^3=0$$

という型の不定方程式に関する結果から，$E(\mathbf{Q})$ の位数が $2,3,4$ となる楕円曲線を与えている．

Levi([16]) は Ogg 予想とも呼ばれた，torsion 部分の群の位数に関する命題を既に予想している．

Haentzschel([9] 他) は Fermat 以来の楕円曲線の有理点問題，例えば

$$y^2=4(x+8)(x^2-8x+43)$$

に初めて Weierstrass の $\wp$ 関数を応用した．これが具体的な数論の問題に楕円関数が応用された最初であろう．

なお，Schlesinger [35] は以上述べてきた，Fermat, Euler, Jacobi, Poincaré の仕事を手際よく紹介した，最も早い時期の解説記事である．

Mordell([21]) は群 $E(\mathbf{Q})$ が有限生成であるという，いわゆる Poincaré 予想を証明した．しかし，この表現は今風で，彼自身は Poincaré や，それを紹介した Schlesinger 同様,「有限個の点から接弦法によってすべての有理点が得られる」と表現している．Mordell は

$$y^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

に整数解が有限個しか存在しないことを証明しようとして失敗し，その過程を振り返っているうちに Finite Basis Theorem の証明ができているのに気付いたのだという（[32]）．その結果を 3 次の非特異曲線の結果に述べ直したのである．4 次曲線に代数的数論を適用したその証明の概略は [33] に紹介されている．

論文 [21] には，加群というような用語は現れないけれども，既に有限個のパラメータ $u_1, \cdots, u_n$ が取れてすべての有理点が

$$m_1 u_1 + \cdots + m_n u_n, \quad m_j \in \mathbf{Z}$$

という形に書けるという表現になっている．これによって，Mordell，あるいは Hurwitz と Mordell の間のころに，少なくとも implicit には楕円曲線上の点の全体が群をなすという事実が気付かれたものと思われる．

Weil([29]) は Finite Basis Theorem の証明を簡易化したが，パラメータの加法演算の幾何学的な意味も説明し，目的が「この加群が有限生成であることの証明である」と宣言している．また，その証明も（Mordell の場合と違って）群であるという事実が基本的に使われている．このようなわけだから，**楕円曲線の群構造を explicit に指摘した人は Weil であるといって良いことになるのではなかろうか**．

4.　Frey の貢献

Wiles による FLT の最終決着に至る道を考えるとき，最も crucial な turningpoint は Frey 曲線の導入と FLT の谷山予想への還元であろう（[8]）．どうして Frey はこの奇妙なアイデアにたどりついたのか，その経緯を探るのが本節の主題である．

70 年代の初め頃，楕円曲線の torsion 点の決定問題の研究が盛んであった．Néron の還元理論 ([22]) を応用すると，楕円曲線が有理的 torsion を持つための局所条件が出てくる．これらの条件を調べると，必然的に Fermat 方程式に類似の不定方程式が登場する．例えば，

定理（Demjanenko [2], Hellegouarch [12]）　楕円曲線 $E(\mathbf{Q})$ が位数 p^2 の有理点を持てば，Fermat 方程式

$$x^p + y^p = z^p, \quad xyz \neq 0$$

は $p \mid xyz$ なる整数解を持つ．従って，p が正則素数ならば，$E(\mathbf{Q})$ は位数 p^2 の点を持ち得ない．

Frey はいくらか遅れて torsion 部分群決定のゲームに参加し，上の定理と似たような定理をいくつか証明した ([6]) : この，遅れて参加したことが FLT 解決のためには幸いしたのである．Frey がこの論文を出したのと奇しくも同じ年，Mazur([17], [18]) が有理 torsion 問題における最終結論に到達した．こうした場合，Frey の仕事はほとんど無に帰することになるのが普通である（実際，[6] には校正時に挿入した脚注として，「こうした定理の仮定は決して満たされないことが Mazur によって証明された」と記されている）．ところが，この論文の中に 1 ページだけ，後に

なって重要な意味を持つ考察がされていた．つまり，問題の逆が考察の対象になっているのである：

> 自然に逆の問題が持ち上がる：上の方程式に解があるならば，位数 p の有理点を持つような楕円曲線が存在するだろうか？

Frey は続いて，「そうした有理点が存在するか，さもなければガロア群が体 K が存在する」ということを証明している．これには p-torsion points の座標の添加によって，ほとんどの場合，$GL_2(\mathbf{F}_p)$ をガロア群に持つ体が生成されるという Serre([26]) の結果が使われている．Mazur の結果によれば，「そうした有理点は存在しない」のであるから，「ガロア群が $GL_2(\mathbf{F}_p)$ に同型で $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ 上不分岐な体が存在する」ことになる．この考察のおかげで，Frey にとっては Mazur の結果は問題の終焉ではなく，新しい問題の始まりであった．

modular curve との関連は Frey[7] において初めて登場する．この論文では moduli problem を考えることによって，Fermat curve に対する Mordell 予想（今や，Faltings の定理）と modular curve との関連が研究されている．結果自身は大したものではないが，この中で，いわゆる Frey curve

$$y^2 = x(x - a^p)(x - c^p)$$

（ここに a,b,c は

$$a^p + b^p = c^p$$

を満たす自然数）の持っている不可思議な性質，例えば，semi-stable であること，判別式が 2 の因子を除けば $2p$ 乗数であること，先に述べたような小さな分岐を持つ大きなガロア拡大が存在すること等が列挙されている．この Frey curve の異様性が Frey に FLT は正しいに違いないという確信を持たせるに至ったのである．

谷山予想への還元の経過を Frey 自身の見方でまとめてみると次のようになる：

> (Frey に問い合わせた筆者に対する手紙の要旨) Mazur の重要な仕事を契機として二つのことが新しくわかった．第一は，p-torsion points の座標を添加することによって $GL_2(\mathbf{F}_p)$ と同型なガロア群を持つ体が生成され，その分岐は楕円曲線の算術によって制御されるのだが，それまでの考察を逆に辿ることによって，Fermat 型の方程式の解がたいへん小さな分岐を持つ大きな拡大体を与えることになることである．ガロア群が $GL_2(\mathbf{F}_p)$ で，$2p$ において小さな分岐を持つだけの体の存在 (ないしは非存在) の問題は Kummer による正則素数の判定の 2 次元版とみなせる．第二に，modular form の算術と関係があるという事実である．これが本質的な部分である．

1984年，Frey は Oberwolfach で

$$\text{谷山予想} \Longrightarrow \text{FLT}$$

という予想をし，証明のためのアイデアを説明した．このアイデアは公刊されなかったが，「E の Néron model を考察し，bad reduction を持つ素点での mod p reduction での component の個数を modular curve $X_0(N)$ の Jacobian の同様な個数と比較して，これらが一致しないことから，任意の楕円曲線が modular curve でパラメトライズされるという仮定に矛盾する」という筋書が [34] の中で簡単に解説されている．数カ月後，Serre はより簡潔な，Galois 表現を利用した形に改良し，実際には

$$\text{谷山} + \varepsilon \Longrightarrow \text{FLT}$$

であるとして，その ε を次のように定式化した：

Epsilon Conjecture([27])

(1) ρ を level $pM, (p, M) = 1,$ かつ weight 2 の modular representation とし，ρ は p で finite であるとする．このとき ρ は実は level M, weight 2 の modular representation である．

(2) ρ を level $M_1M_2, (M_1, pM_2) = 1$, weight 2 の modular reresentation とし，さらに ρ は M_1 の素因子で不分岐とすると，実は ρ は level M_2, weight 2 の modular representation である．

Frey はこうした Serre の助けをまとめて論文 [8] とした（1986）．Frey 以後の展開については [34] が簡潔で，要を得ていてよい．ε Conjecture は Mazur[19] によって部分的に，その手法を一般化させて Ribet[24] によって完全に，証明された．

関連書籍

[1] Clebsch, A., *Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen*, J. Reine Angew. Math. 64, 210-270, 1865

[2] Demjanenko, V. A., *Points of finite order on elliptic curves* (Russian), Acta Arith. 19, 185-194, 1971

[3] Diophantus, *Diophante d'Alexandrie* (tr. by P. V. Eecke), Blanchard, Paris, 1959

[4] Fermat, P. de, *Ovservationes*, Oeuvres de Fermat, tome 3, 241-274, Gauthier-Villars, 1896

[5] —, *Doctrinae Analyticae Inventum Novum*, ibid., 325-398

[6] Frey, G., *Some remarks concerning points of finite order on elliptic curves over global fields*, Arkiv. Mat. 15, no.1, 1-19, 1977

[7] —, *Rationale Punkte auf Fermatkurven und getwisteten Modulkurven*, J. Reine Angew. Math. 186-191, 1982

[8] —, *Links between stable elliptic curves and Diophantine equations*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae, 1, 1-40, 1986

Haentzschel, E.,
[9] *Euler und die Weierstraßsche Theorie der elliptischen Funktionen*, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung, 22, 1913, 278-284
[10] Hellegouarch, Y., *Étude des points d'ordre fini des variétés abéliennes de dimension un définies sur un anneau principal* , J. Reine Angew. Math. 244, 20-36 (1970)
[11] —, *Courbes élliptiques et équation de Fermat*, Thèse, Besançon, 1972
[12] —, *Points d'ordre* $2p^h$ *sur les courbes élliptiques*, Acta Arith. 26, 253-263, 1975
[13] Hurwitz, A., *Über die Schröter'sche Konstruktion der ebenen Kurven dritter Ordnung*, J. Reine Angew. Math., Bd. 107, 141-147, 1891 = Werke, Bd. II, 722-728
[14] —, *Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades*, Vierteljahrschrift d. Naturfor. Gesell. Zürich, 62, 1917, 207-229 =Werke, II, 446-468
[15] Jacobi, C. G., *De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianarum in analysi diophantea*, J. Reine Angew. Math. 13, 353-355, 1834 = Gesammelte Werke II, 51-55
[16] Levi, B., *Saggio per una teoria aritmetica della forme cubiche ternarie*, Academia reale delle scienze di Torino, Nota I-IV, 1906-1908
[17] Mazur, B., *Modular Functions of One Variable I*, Springer LN 320, 1977
[18] —, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, IHES 47, 33-186, 1977
[19] —, *Letter to J-F. Mestre*(16 August 1985)
[20] Mordell, L. J., *On the rarional solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees*, Proc. Camb. Phil. Soc., 21, 179-192, 1922
[21] —, *Indeterminate equations of the third and fourth degrees*, Quart. J. Pure and Applied Math., 45, 170-186, 1914
[22] Néron, A., *Modéles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, IHES 21, 1974
[23] Poincaré, H., *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, J. Math.(3), 7(1901), 161-233 = Oeuvres, V, 483-548
[24] Ribet, K., *On modular representations of* $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *arising from modular forms*, Inv. Math. 100, 431-476, 1990
[25] Sesiano, J., *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica*, Springer, 1982
[26] Serre, J-P., *Propriété galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inv. Math. 15, 259-331, 1972
[27] —, *Lettre à J-F. Mestre(13 août 1985)*, Contemp. Math. 67, 263-268, 1987
[28] —,*Sur les représentations modulaires de degré 2 de* $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. 54, 179-230, 1987
[29] Weil, A., *Sur un théorème de Mordell*, Bull. Sci. Math., (2) 54 (1930), 182-191 = Collected Papers, 1,

* * *

[30] Dickson, L. E., *History of the Theory of Numbers*, vol. 2, Carnegie Institute of Washington, 1920 (reprint, Chelsea, 1971)
[31] Dieudonné, J. (ed.), *Abrégé D'histoire des mathématiques*, 2 vols, Herman, Paris, 1978
[32] Mordell, L. J., *A Chapter in the Theory of Numbers*, Cambridge, 1947
[33] —, *Diophantine Equations*, Academic Press, 1969
[34] Ribet, K. A., *Galois representations and modular forms*, Bull. AMS (New Series), 32(4), 375-402, 1995
[35] Schlesinger, L., *Über ein Problem der diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré*, Jahresbericht, 17, 57-67, 1908

[36] Weil, A., *Number Theory: An Approach through History; From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1983
[37] Zagier, D., *Elliptische Kurven: Fortschritte und Anwendungen*, Jber. d. Dt. Math.-Verein., 92, 58-76, 1990

第8章

解析的数論の 100 年史から

鹿野 健

1. 素数定理と Landau の Handbuch

1996 年は，いわゆる素数定理が Hadamard [4] と de la Valleé Poussin [19] とによって同時にかつ独立に証明されてから，ちょうど 100 年になる記念すべき年に当たるが，その成果は 19 世紀の数論の 1 つの総決算であると同時に，20 世紀への道筋を方向づけるものともなったと言えよう．Riemann [17] によって基礎が与えられた，複素関数論を数論の問題に応用するという方法は，それ以後の数論の内容を飛躍的に豊かにした．Hadamard と Valleé Poussin は Riemann の仕事を完成するという形で進み，上述の素数定理の証明を得たのであるが，そこに含まれている本質的な部分を的確に抽出して簡略化し，それによってさらに応用範囲の広い方法へと発展・整理したのは E.Landau であり，その功績は 20 世紀における解析的数論の進歩に非常に大きく貢献した点にあることを強調したい．実際，1909 年に出版された大著 [12] は，以後ほとんど半世紀に渡って最も重要でかつ標準的な教科書として広く重用された．[12] の編集序文にも引用されているように，Hardy と Heilbronn は Landau への追悼文 [8] で次のように述べている：『Handbuch は，Landau が書いた本の中で恐らく最も重要なものである．そこには解析的数論というものが，いくつかのバラバラな美しい定理の集まりとしてではなく，1 つの系統的な科学として初めて示されている．そして，それ以前は少数の冒険心に富んだ英雄達だけに許された活躍の場であったこの分野を，以後 30 年間最も実り豊かな分野の 1 つへとこの本は変えたのである.』

Landau 自身は，その序文の最後を次のようにしめくくっている：『今までは，困難な未解決問題が多くの人を素数論から遠ざけていたが，私がここに新しく開いた道を通って，これから以後多くの人々が続いてくれるものと期待する.』

さて，Čebyšev (Tschebyschef) の先駆的な研究 [3] によって明らかにされたように，正数 x 以下にある素数の個数 $\pi(x)$ (この記号は Nielsen [15] に始まり，Landau

によって広められた) の漸近的な大きさが $x/\log x$ であるという素数定理 (当時は予想)，すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1, \tag{1.1}$$

という予想は，関数

$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p \qquad (p\text{ は素数})$$

の漸近的な大きさが x であること，すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1, \tag{1.2}$$

と同値であるが，Hadamard と Valleé Poussin は Riemann のアイディアにしたがって複素関数論によって，いわゆる Riemann のゼータ (Zeta) 関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}, \qquad (s=\sigma+it)$$

が $\sigma=1$ 上に零点をもたないことなどを証明して，(1.2) を得たのであった．Hadamard はさらに，Riemann が詳しく示さなかった，$\zeta(s)$ に関する他の重要な性質をも証明し，当時ようやく発展し始めた整関数の理論の偉力を示したが，Landau はこれらの方法を注意深く検討した結果として，素数定理の証明で最も本質的 (実は同値) な部分は

$$\zeta(s)\ne 0 \qquad (s=1+it) \tag{1.3}$$

であることを見抜き[1]，関数論的な方法を最小限に押える証明法を目指したのである．その最初の成果が 1903 年の [9] であり，Handbuch に再録されているものである．Čebyšev が示したように[2]，$\pi(x)$ をより良く近似する関数は $x/\log x$ よりも

$$\mathrm{Li}\,x=\int_2^x\frac{dt}{\log x}$$

で定義される，いわゆる積分対数 (Integral Logarithm) であり，Valleé Poussin [20] は実際，定数 $c>0$ に対して，$x\to\infty$ のとき，評価式

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(x\exp(-c\sqrt{\log x})\right), \tag{1.4}$$

が成り立つことを示した．

---

1) Riemann [17] がすでに知っていたと思われる．これについては，[10] を参照．
2) Gauss もこれを知っていたように思われる．これについては，[12] の §6 を参照．

ここで，(1.4) の右辺の記号 $O(\quad)$ は[3]，

$$\varlimsup_{x\to\infty}|\pi(x)-\mathrm{Li}\,x|/\left(x\exp(-c\sqrt{\log x})\right)<\infty,$$

の意味であり，換言すれば，$\pi(x)$ の「誤差項」

$$R(x)=\pi(x)-\mathrm{Li}\,x,$$

の ($x\to\infty$ のときの) 大きさが $x\exp(-c\sqrt{\log x})$ より大きくないことを (1.4) は示している．

Landau [9] は，(1.4) を得た Valleé Poussin の方法を簡易化し，整関数論によらずに，また $\zeta(s)$ の $s=1$ 以外での正則性にもよらずに (1.4) のタイプの評価式を証明した．彼の得た最初の結果は，(1.4) の右辺の O の中に，$\sqrt{\log x}$ の代りに $(\log x)^\alpha$ $\left(\frac{1}{13}\le\alpha<\frac{1}{10}\right)$ が入るという形のものであったが，素数定理の拡張の 1 つである「素イデアル定理」を証明するためには十分役立ったのである．というのも，当時はまだ Dedekind のゼータ関数の正則性が得られていなかったからで，上述のような方法が必要だったのである．後に，1909 年 Landau [11] はその同じ方法で (1.4) そのものが得られることをも示したが，この年は Handbuch の出版された年でもあり，32 歳の Landau の若い力を感じさせる．同年，彼は Minkowski の後を継いで，Göttingen 大学の正教授となった．

2. Tauber 型定理の誕生とその発展

素数定理の証明された翌年の 1897 年に，1 つのささやかな論文が A.Tauber という数学者によって発表された [18] が，その当時この論文が後世に与えることになる影響について予測できた者は，Tauber 自身も含めて，誰もいなかった．Tauber の得た結果というのは，Abel の定理として知られている，べき級数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\qquad 0<x<1 \tag{2.1}$$

の $x\to1$ のときに関するものの逆が成り立つための条件 (c_n に関する) についてのものであった．すなわち，(2.1) が $0<x<1$ で $f(x)$ に収束し，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\quad(=A) \tag{2.2}$$

が収束するならば，

---

3) 記号 O は，記号 o (後述) とともに通常「Landau の記号」とよばれるが，O は Bachmann [1] によるものであることを，Landau 自身が述べている．[12] の巻末の注 (p.883) を参照．

$$\lim_{x \to 1} f(x) = A \tag{2.3}$$

が成り立つ，というのが Abel の定理 (我が国では,「アーベルの連続定理」とよばれることが多い) であるが，この逆，すなわち，(2.3) が成り立つならば (2.2) が (A に) 収束する，という命題は一般には正しくない ($c_n = (-1)^n$ がその簡単な反例).
Tauber は，そこで c_n が次の条件

$$nc_n \longrightarrow 0, \qquad (n \to \infty) \tag{2.4}$$

をもし満たしていれば，上の逆命題が成り立つことを示したのである．Tauber は (2.1) の他に，次のような場合も考察した．つまり，(2.2) の部分和 S_n を

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

として，その「平均」

$$\sigma_n = (S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1})/n$$

を考える．もし

$$\sigma_n \longrightarrow A \qquad (n \to \infty) \tag{2.5}$$

でかつ (2.4) が成り立てば，やはり (2.2) が A に収束することを示したのである．後に，(2.1) のような方法を Abel 総和法，(2.5) のような方法を Cesàro 総和法とよぶようになる．そして，逆を保証するこのようなタイプの定理のことを「Tauber 型定理」(Tauberian Theorem) とよぶが，これは Hardy と Littlewood の共著論文 [6] で初めて用いられた言葉である．そして以後，(2.4) のような条件のことを，「Tauber 条件」(Tauberian condition) というようになる．

この Tauber の結果に着目してそれを複素数 (実数 x の代りに，複素変数 z; $|z| < 1$ とする) の範囲に拡張したのが Pringsheim [16] であるが，最初の本質的な改良を得たのは Hardy [5] であった．そこで彼は，Cesàro 総和法の場合について，Tauber 条件 (2.4) が

$$n|c_n| \le K \qquad (K \text{ は正の定数}) \tag{2.4$'$}$$

とゆるめられることを示したのである．しかし彼は，Abel 総和法の場合については改良に成功しなかった．そして実は，(2.4′) はもはや Abel 総和法の Tauber 条件にならないだろうという見解を述べている．しかし，Hardy のこの予想は誤りであったことが翌 1911 年に発表された Littlewood の論文 [13] によって明らかとなった．そこで彼は，(2.4′) が Abel 総和法における Tauber 条件になることを証明し，同時に，それがある意味で限界の条件であることも示したのである．このこ

とについては，おもしろいエピソードがあり，Littlewood 自身が著書 [14] の中でそれを紹介している．それによると，1910 年の復活祭の休暇中に起った出来事である [4]．これより以前，彼は Hardy から，上述の Cesàro-Tauber 定理のことを聞いていて，Hardy からこれを Abel 総和法の場合に考察するという問題の示唆を与えられた Littlewood (当時 25 歳) は，激しい雨の中を 2 時間ほど散歩しているときに，証明の鍵となる定理 —「導関数定理」とよぼう — の証明の糸口を見出し，遂にその証明に成功したのであった．その導関数定理とは，論文 [13] の定理 A のことであり，その簡単な 1 つの形は，

$$\text{“}\ \phi(x) \to 0\,(x \to \infty)\ \text{で}\ \phi''(x)\ \text{が有界ならば，}\ \phi' \to 0\,(x \to \infty).\text{”}$$

というものである．

この論文は，Hardy の示唆によって原草稿を大幅に書き変えたものであることがその序文にも述べられているが，これが以後の 2 人の 35 年間に渡る共同研究の始まりとなるものであり，その点でもきわめて興味深い．

ところで，2 人はこれに続いて共同で，色々な Tauber 型定理とその関連分野の研究を発表するが，それらの中でやはり上記の導関数定理は有効に使われていた．そこへ，1914 年になって Hadamard から次のような指摘が来たのである．それは，この導関数定理と同じものを既に 1897 年，Hadamard と Kneser が (互いに独立に) 得ていたというものであった．もちろんそれらは共に Hardy-Littlewood とは異なるテーマにおける別の研究であるが，これについて Littlewood は前記のエピソード中で,『もし Hadamard や Kneser の結果を知っていて，自分自身で考えなかったならば，決して定理は得られなかったであろう．…… 既存の文献に深入りせずに自力で研究することは良いことであり，私はそのようにしてきた …….』と語っている．

ここで忘れずに付け加えておかなければならないのが，Bromwich と Landau の業績についてである．

Tauber の結果に注目してそれを著書 [2] に初めて紹介したのが Bromwich であり，彼自身も Hardy との共同研究等を通じて Tauber 型定理の発展に寄与しているが，何といっても著書 [2] を著した功績は特筆される．しかし残念ながら，その第 2 版 (1926 年) では，それらを含めて他の魅力的な多くの記述がなぜか削除されてしまった．理由は不明であるが，より普及し易い教科書にしようという出版元の意向でもあったのであろうか．

Landau については，§1 で述べた Handbuch [12] との関連から始まる．不思議なことに，あれほどの完璧さを誇る Handbuch の文献中に，Tauber の論文は入っ

---

[4] [14] では 1911 年となっているが，Littlewood の論文が投稿されたのが 1910 年 9 月 28 日であるから，1911 年というのは彼の記憶違いか書き間違いかであろう．

ていない．そして，上記 Hadamard と Kneser の論文も (もちろん？) 含まれていない．それにもかかわらず，実は導関数定理も，Tauber 型定理も，既に [12] の §66 には書かれているのである．その後注には，それらの結果が Landau [10] からのものであると記されていて，その [10] §9 では，文献中にそのような結果を見付けられなかったとして，導関数定理の 1 つの形が与えられている．Tauber 型定理における Landau の業績は，Hardy と Littlewood によって得られた Abel 総和法，Cesàro 総和法における Tauber 条件 (2.4′) を，

$$nc_n \geq -K \tag{2.6}$$

という「片側」条件に拡張したことが第一であり，第二は次節で述べるように，素数定理への応用という面で多くの貢献をしたことであろう．

3.　解析数論と Tauber 型定理

Tauber 型定理と数論との関係を初めて明かにしたのは 1921 年に発表された Hardy と Littlewood の 共著論文 [7] である．そこでは，Lambert 級数と素数定理との関連性が証明されているが，Ananda Rau の示唆によって，それを “Lambert 総和法” の Tauber 型定理という形で表わせば，次のような結果になる．

いま，Lambert 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n x^n}{1-x^n}$$

が $0 < x < 1$ の範囲で収束し，

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n x^n}{1-x^n} = A$$

となるとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

は A に Lambert 総和可能であるといい，これを

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A\,(L) \tag{3.1}$$

と略記することにしよう．すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A\,(L)$$

は常に成り立つが，その逆は無条件には成立しない．その逆を保証するのが，Hardy-Littlewood によって 得られた Tauber 条件

$$na_n \geq -K \qquad (K\ :\ \text{定数}) \tag{3.2}$$

である．つまり，(3.2) が成り立っているならば，(3.1) から

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

が結論されるのである．

さて，Landau の Handbuch [12] (§150 ～) にもあるように，Möbius 関数を $\mu(n)$ とすると，素数定理は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(x)}{n} = 0 \tag{3.3}$$

と同値であることが，von Mangoldt と Landau によって知られている．そこで，

$$a_n = \frac{\mu(n)}{n}$$

と置くと，これは (3.1) と (3.2) の双方の条件を $A = 0$ として満たすことが証明できる (特に，(3.2) は $\mu(n)$ の定義から明か)．したがって，(3.3) が結論され，素数定理が証明されたことになる．

しかし，Hardy-Littlewood も認めているように，これは素数定理の証明をしたことになっていないのである．実は，先の Tauber 型定理自身の証明に，素数定理が使われているのであって，上の「証明」は単なる循環論法の枠を出ないのである．したがって，素数定理を用いないでこの Tauber 型定理を証明できれば，素数定理の新しい証明法が得られたことになるのである．それに最初に成功したのが Wiener [21] であるが，それはさらに改良，簡単化されて，1932 年の論説 [22] にまとめられた．それは，後に「Wiener の一般 Tauber 型定理」とよばれるようになる，非常に適用範囲の広い一般論として得られた Tauber 型定理の 1 つの鮮かな応用例であった．それによって逆に，素数定理の本質が，

$$\zeta(1+it) \neq 0,$$

すなわち実軸 $\sigma = 1$ 上に，Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ の零点は存在しない，という事実にあることが明かにされたのである．そのために用いられる Wiener の Tauber 型定理は次のようなものである：

関数 $g(t)$ が $(0, \infty)$ で Lebesgue 可積分で，すべての実数 x に対して

$$\int_0^{\infty} g(t) \cdot t^{-ix} dt \neq 0 \tag{3.4}$$

であるとする．

そして，$f(t)$ は有界でかつ「緩振動 (slowly oscilating)」関数，すなわち，$x \to \infty, y > x, y/x \to 1$ であるとき，

$$f(y) - f(x) \longrightarrow 0$$

となるような関数とする．このとき，もし

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt \longrightarrow A\int_0^\infty g(t)dt \qquad (x \to \infty) \tag{3.5}$$

が成り立つならば，

$$f(x) \longrightarrow A \qquad (x \to \infty)$$

が成り立つ．

この Wiener の定理において，

$$f(t) = \frac{1}{t}\sum_{n \le x} \mu(n),$$

と置き，$p(t) = \left[\frac{1}{t}\right]$ と正の定数 a, b に対して[5)]

$$g(t) = 2p(t) - ap(at) - bp(bt),$$

とすると，$f(t)$ は有界かつ緩振動関数であることが確かめられ

$$\int_1^x \left[\frac{x}{t}\right] f(t)dt = \log x$$

であることから，(3.5) が $A = 0$ として成り立つこともわかる．したがって，残るのは (3.4) であるが，$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき

$$\int_0^\infty g(t)\cdot t^s dt = (2 - a^{-s} - b^{-s})\frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

であることから，(3.4) は $\zeta(1 - ix) \neq 0$ と同値であることがわかる．故に，$\zeta(s)$ の零点が実軸 $\sigma = 1$ 上にないこと (Vallée Poussin [19] と Hadamard [4]) より，Wiener の Tauber 型定理によって，$f(x) \to 0\,(x \to \infty)$，すなわち

$$\sum_{n \le x} \mu(n) = o(x) \qquad (x \to \infty)^{6)} \tag{3.6}$$

5) $\log a/\log b$ が無理数になるようにとる．

6) $f(x) = o(g(x))(x \to \infty)$ は，$f(x)/g(x) \to 0(x \to \infty)$ の意味．

となる．この (3.6) から (3.3) が出て来ることは Cesàro 総和法の Tauber 型定理 (2.4′) から従うので，素数定理が証明されたことになるのである．

このように，zeta 関数の性質の中から，$\zeta(1+it) \neq 0$ のみが素数定理に必要なものであることが，Wiener の理論から明かにされたのであるが，数論の他の問題においても Tauber 型定理の応用のあることは，それ以後も Hardy-Littlewood や Landau などによって示され，本稿では述べなかったディオファンタス近似論との組合せによって，解析的数論の世界は Riemann の時代とは比較にならないほど広くかつ深いものになったのである．

参考文献

[1] P.Bachmann ; Zahlentheorie, Teubner, 1894.
[2] T.J.Bromwich ; An Introduction to the Theory of Infinite Series, 1st ed. 1908.
[3] P.Čebyšev ; Theorie der Kongruenzen, Kaiser. Akad.der Wiss., 1849.
[4] J.Hadamard ; Comptes rendus, Paris, 122(1896), 1470-1473.
[5] G.H.Hardy ; Proc. Lond. Math. Soc., 8(1910), 301-320.
cf. Collected Papers of G.H.Hardy vol.VI, Oxford. 1974.
[6] G.H.Hardy and J.E.Littlewood ; Proc. Lond. Math. Soc., 11(1913), 411-478.
[7] 同上 ; Proc. Lond. Math. Soc., 19(1921), 21-29.
[8] Hardy and Heilbronn ; Journ. Lond. Math. Soc., 13(1938), 302-310.
[9] E.Landau ; Math. Annalen 56(1903), 645-670.
[10] 同上 ; Rendiconti di Palermo 26(1908), 169-302.
[11] 同上 ; Rend. di Pal. 27(1909), 46-58.
[12] 同上 ; Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Teubner, 1909.
[13] J.E.Littlewood ; Proc. Lond. Math. Soc., 9(1911), 434-448.
[14] 同上 ; A.Mathematician's Miscellany, Methuen, 1953(pp.66-83).
cf. 「リトルウッドの数学スクランブル」(金光滋訳，近代科学社，1990)
[15] N.Nielsen ; Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, Teubner, 1906.
[16] A.Pringsheim ; Münchner Sitz. 31(1901), 507
[17] B.Riemann ; Monats. der König. Preus. Akad.(1859), 671-680.
cf. Gesammelte Math.Werke,Teubner, 2nd ed.,1892 (Dover reprint,1953).
なお,「リーマン予想」(鹿野他著，日本評論社 1991 年) 参照.
[18] A.Tauber ; Monatshefte für Math. und Phys. 8(1897), 273-277.
[19] Ch. de la Vallée Poussin ; Annales. Soc. sci. Bruxelles, 20(1896), 183-256, 281-397.
[20] 同上 ; Memoires l'Acad. royale des Sci. Belgique 59(1899), 74pp.
cf. Colloque sur la Théorie des Nombres, Centre Belge de Recherches Math., Librairie Univ.-Louvain, 1956.
[21] N.Wiener ; Jour. Math. Phys. M.I.T.7(1928), 161-184.
[22] 同上 ; Annals of Math. 33(1932), 1-100.
cf. Nobert Wiener,Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems, M.I.T. Press,1964.

第9章
類体論とイデール

三宅克哉

序

かねてより筆者は19世紀ドイツにおける代数的数論の誕生と生育，および，20世紀20年代にいたる高木－アルティンの類体論の成立過程を調べ，また例えば，チェボタレフの先人でロシアにおける代数的数論の嚆矢，ペテルスブルグのゾロタレフについて，彼が代数的数体における因子論を展開するにいたった直接の動機を取り上げてきた．ここでは，高木－アルティンの類体論の成立のあと，それがさらなる展開を促してイデールを生み出すにいたった内的必然性を問題にする．よく知られているように，イデールは，数論の自然言語としてようやく今世紀の半ばに定着し，アデール幾何学を育み，例えば，21世紀の最重要な課題のひとつと見られているラングランズの壮大なプログラムを語るのに不可欠な言葉である．「20世紀数学」としての類体論を再考するひとつの視点として，イデール誕生の内的必然性に興味をもつ理由がここにある．

以下では，次の項目が論じられる：

1. 高木－アルティンの類体論の現代史的背景
2. クロネッカー・ヒルベルトの類体とヴェーバー・高木の類体
   ――― 単項化・不分岐 vs 「クロネッカーの青春の夢」
3. 「ハセの原理」,「局所－大域関係」と局所類体論
4. 類体論の代数的証明
5. イデールの導入と定着

第1節では，高木－アルティンの類体論を現代数学史の観点から捉えるにあたっての歴史的背景を概観する.「20世紀数学」としての類体論に対する筆者の視点でもあるが，第2節以降が本論である.

第2節では，クロネッカーにさかのぼるべき「類体」の概念とそれを支える数学上の問題意識の二元性を指摘する．これにより，高木－アルティンの類体論がその成立時点で内包していた，数学的な美意識ないし数学的調和という観点から見た「意外性」あるいは「数学的な必然性の欠如」を浮かび上がらせる．

第3節では，いわゆる「ハセの原理」からの視点が類体論に提示した二つの問題を指摘する.「ハセの原理」は例えばすでにヒルベルトの2次体におけるノルム剰余に関する結果に見られ，さらに彼のノルム剰余記号とそれによる平方剰余の相互法則の取り扱いのなかに「局所－大域関係」が本質的なものとして取り出された．これらは類体論を契機としてさらなる展開を見せる．次いで局所類体論が先ずは類体論によって示されるが，直ちに自然な問題が提起された．構造が簡単な局所類体論を先に置き，それとヒルベルトのタイプの相互法則，即ち「局所－大域関係」によって高木－アルティンの類体論を構築するというものである．それはまた自然に類体論の代数的証明を求めること,「類体論の算術化」の問題に繋がる．

第4節では「類体論の代数的証明」について略述し，第5節では類体論における「ハセの原理」ないし「局所－大域関係」がイデールの導入を通して検討される．

類体論に関する数学史の基本的文献としてハセ [H-1967] 及び彌永 [Iy-1969] がある．参照文献として本文中に細かくは記さなかったが，この拙稿をまとめるにあたってもこれらをおおいに参考にさせていただいた．

なお，彌永昌吉先生は，この論文の本質に関わる幾つかの事柄について，シュヴァレから直接お聞きになった貴重な証言を筆者に伝えて下さるとともに，他にも有用な助言を下さった．ここに謝意を記す．

1.　高木－アルティンの類体論の現代史的背景

高木貞治による類体論の確立は，今世紀の日本の数学のみならず，また世界の数学にとっての一つの重大事であった．それは単にその結果が当時の数論の数学的世界観にとって衝撃的であったばかりか，おそらくはヨーロッパ人がその数学的な文化についてまったく未知であった極東の地でなされたことにもよるであろう．もっともこの成果は，高木がストラスブールの国際数学者会議で発表した時点では，一，二の例外的な人を除き，まったく気にもとめられなかったようである．高木自身，ヒルベルトも彼が送った別刷りを受け取った時点ではそれを読まなかったろうと推測している．ヒルベルトは有名な彼の23問題のなかに「クロネッカーの青春の夢」と「一般相互法則」をあげたが，類体論についてはまったくコメントしていない．類体論の成立を数学史的な観点から，また特にドイツから見るとき，その決定的な成果は，まったくの異文化人高木貞治によって唐突にもたらされた．のみならず，さらにアルティンの一般相互法則の確立に対しても，ヨーロッパのはる

かな果てからやはり唐突に寄せられたチェボタレフによる密度定理 (すなわち「フロベニウスの予想」) の証明が，衝撃的かつ本質的な影響を与えた．確かに 20 世紀の数学は，19 世紀のそれとのある種の断絶を明示しながら自己を展開し始めた．

ガウスに始まり，19 世紀を通じて主としてドイツにおいて育まれた代数的数論は，ヒルベルトのいわゆる『数論報文』によって集成され，さらなる展望が与えられた．今世紀に入り，例えば Ph. フルトヴェングラーがヒルベルトの類体論をおおむね確立し，また R. フュエターが「クロネッカーの青春の夢」への大なる進展を見せた．これらを引き継いで，高木は一気に彼の類体論を確立して代数体の「相対アーベル体」の理論を組み上げたばかりか,「クロネッカーの青春の夢」に対する完全な解答を与えた．

続いて E. アルティンは高木の類体論に強く刺激されて「一般相互法則」を樹立した．また H. ハセは彼の『数論報文』によってこれらをあまねく紹介し，さらに高木－アルティンの類体論の本質を「ハセの不変量」を導入して，いわゆる「ハセの原理」と「局所－大域関係」を機軸として提示した．C. シュヴァレは類体論に完全に代数的な証明を与え，イデールを導入し，ついに類体論に最も自然と思われる表現を与えた．

類体論はその成立時から「非アーベル的類体論」へと人を駆り立てた．一方では岩澤健吉や J. テイトによって代数体のイデール群上の関数解析が展開され，アデール幾何学を育み，R. ラングランズの壮大なプログラムを産む．他方では p-拡大論の展開を促し，例えば岩澤理論等の形成にも強く影響を与えた．また「クロネッカーの青春の夢」のその後の展開についていえば，A. ヴェイユのアーベル多様体の代数的理論を得て，志村，谷山等が虚数乗法論の一般化をもたらし，遂には志村によって著しい進展が与えられた．メイザー－ワイルスによる岩澤の基本予想の証明には，この志村の結果を欠くことは出来なかった．もちろんこれらにもその背景にあった，例えば代数群や保型関数等の理論の進展を欠くことはできなかった．また類体論は，例えばコホモロジカルな数学的構造を具現するものとしても，今世紀の数学と数学者に強い影響を与えてきた．

類体論の誕生の兆しは，いずれも 1897 年に出版された H. ヴェーバーの論文と上記の D. ヒルベルトの『数論報文』にある．そして高木貞治が文部省の命を受けて 3 年のドイツ留学に旅立ったのは，その翌年の 1898 年 6 月 28 日のことであった．また E. アルティンと H. ハセが生まれたのもこの年である．このようなことを思うとき，類体論の 100 年は，まさに 20 世紀数学を織り上げた主要な縦糸の一本であったとの感慨をおぼえる．

2. クロネッカー・ヒルベルトの類体とヴェーバー・高木の類体

— 単項化・不分岐 vs 「クロネッカーの青春の夢」

2.1 アーベル多項式と虚数乗法を持つ楕円関数

高木はクロネッカーを「予言者」と呼んだ ([T-1948]). 彼の最初の「予言」はいわゆるクロネッカー・ヴェーバーの定理である：

定理. 有理数体上のアーベル方程式 (そのガロア群がアーベル群であるもの) の根は必ず 1 の冪乗根の有理整数係数の有理式として表わされる.

これは 1853 年に [K-1853] で明言され，ようやく 1886 年にヴェーバーの [W-1886] で一応の証明が与えられた．特にこの論文 [K-1853] の最後で，クロネッカーはガウスの数体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$ について触れている；この場合には，1 の冪乗根，即ち複素指数関数の周期の等分点での値，に代わり，レムニスケート楕円関数の周期の等分点での値が同様な役割を果たすであろうと，まったく根拠を示さずに述べられている．レムニスケート楕円関数とは，レムニスケートの弧長を与えることから得られた楕円積分関数

$$\int_a^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

の逆関数をいう．ガウスに影響されて，ここにクロネッカーの「最もお気に入りの青春の夢」がつぼみを持ったことになる．ただし，このクロネッカーの「青春の夢」の文言については，後に 1880 年のデデキントに宛た手紙 [K-1880] に初めて現われる．

このようにして，有理数体や虚 2 次体上のアーベル方程式，ないしアーベル拡大，のすべてを特徴づけてしまおうという問題意識が突然に提示された．これがヴェーバー，高木を捕え，フュエター [Ft-1914] が著しい進展を与えて，最終的に高木に火を着けることになる．

2.2 虚二次体の理想数と楕円関数の特異モデュライ

アーベルは虚数乗法を持つ楕円関数に関連して新しいタイプのアーベル方程式を例示していた．そのモデュライ（楕円関数を特定するパラメータの値）が虚数乗法を与える虚 2 次体上にアーベル拡大を与える．クロネッカーはこれについての検討を進め，そこにこの虚 2 次体のイデアル類群が本質的に関連していることを確信した（[K-1857a, b]）．さらに続けて，このモデュライが不分岐拡大を与えていることを指摘する（[K-1862]）．もっともこの時点では「虚 2 次体のイデアル類

群」ではなく「与えられた負の判別式をもつ 2 元 2 次型式の同値類」を用いて表現されていた．ただし，数体におけるイデアル類群とは，その数体の分数イデアル全体の乗法群を，その数体の数 ($\neq 0$) が作る単項イデアル全体の部分群で割った剰余群をいう．

クロネッカーの師であったクムマーは，ガウスの影響のもとで一般の冪剰余記号の相互法則を求めて円分体の数論，特に因子論を展開し，円分体における「素数」の不足を補うために仮想的な，即ちイデアとしての「理想数」を導入していた．この理論が申し分の無い整合性を有すること，またそれにより，例えば伝統的な 2 次型式の理論を 2 次体の数論として明晰に展開できること，などにより，クムマー自身はこの理論の正当性についてなんらの問題を感じなかったようである．しかしクロネッカーは，このような本質的な理論においては「理想数」に対して明確な数学的表現を与えるべきであるとする数学観を持っていた．しかも自分自身，一般の代数的数体に対して適用できるそのための方法を見い出していた．

他方で特にアーベルに導かれて虚数乗法について詳しく調べたクロネッカーは，虚数乗法を持つ楕円関数のモデュライ，即ち特異モデュライ，の各数が，虚 2 次体のイデアル類とうまく対応して振る舞うことを発見した．予言者クロネッカーによって虚 2 次体における「単項化定理の雛型」が見い出されたわけである．G. フライ [F-1989] は，虚数乗法を与える虚 2 次体に，対応する特異モデュライを添加して得られる拡大のうちの最小のものを「クロネッカー類体」と呼んでいる．

1882 年になってようやくクロネッカーは待たれていた彼の因子論を発表し，次の問題を中心課題として提唱した：一般の代数的数体に対し，そのすべての理想数 (イデアル) が不分岐アーベル拡大で実際の数として実現出来る (単項イデアルになる) ような最小の拡大を見い出せ．

2.3 ヒルベルトの類体と冪剰余の相互法則

ヒルベルトはまず [Hi-1897] で一般の素数次不分岐巡回拡大を調べ，少なくとも拡大次数個のイデアル類が単項化することを示した (定理 94)．次いで，平方剰余の相互法則との関連と，ヴェーバー [W-1897] の影響もあって，明快で応用性に富む「ヒルベルトの類体」の構想を提示する ([Hi-1898, -1899a])．これは，一般の代数的数体に対して，その不分岐アーベル拡大でガロア群がイデアル類群と同型になる「ヒルベルトの類体」が存在すること，そこで単項化定理を含む幾つかの性質が成り立つこと，および次の「終結定理」が成り立つ，というものである：

終結定理． 基礎の体の不分岐アーベル拡大はすべて「ヒルベルトの類体」に含まれる．

この背景には一般の代数的数体における相対 2 次拡大についての深い考察 [Hi-

1899b] があった．この論文では，類数がちょうど 2 で割れる場合に「2-ヒルベルト類体」の存在が示され，ヒルベルトのノルム剰余記号が導入され，その積公式から平方剰余の相互法則が導かれた．

ヒルベルトの力点は，一般の冪剰余相互法則と，それに基づく相対アーベル拡大の理論の建設にあったと思われる．「ヒルベルトの類体」の存在等については，彼が示した「2-ヒルベルト類体」の場合の方法を注意深く一般化して適用すればよいと見ていたようである．

いよいよ 20 世紀に入り，フルトヴェングラーがこのヒルベルトのプログラムを追うことになる．1904 年から 1913 年にいたる一連の論文 [Fw-1904 ～ -1911] で，彼は「ヒルベルトの類体」に関して，単項化定理と終結定理を除くすべてを証明し，素数次の冪剰余相互法則を確立する．彼は「クロネッカーの青春の夢」についてはまったく興味を寄せなかったようであるが，単項化定理には執着した．後にアルティンの相互法則による群論化（[A-1930]）を知らされ，老体にむち打って (?!) 込み入った計算を敢行してこれを証明した ([Fw-1930]).

2.4 楕円関数の周期の等分点と合同類別

前二節でクロネッカー・ヒルベルトの類体をめぐる歴史的文脈を見た．注意深く検討すれば，そこにある数学的な結果はその数学的実体とうまく馴染んでいるように見える．一方，ヴェーバー・高木の類体に不可欠な「合同類別」となると状況はいささか繁雑になる．その源を再び虚数乗法を持つ楕円関数に求めなければならない．

アーベルによる楕円関数は，楕円積分関数の逆関数として定義され，複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上に二重周期を持つ．ヴァイエルシュトラスの $\wp$-関数が導入されて以来，逆に二重周期性から楕円関数を特徴づけることが明快になった．今 $\boldsymbol{C}$ 上に独立な二つの周期 ω_1 と ω_2 が与えられたとし，$\tau = \omega_1/\omega_2$ と置く．仮定から τ は実数ではない．通例のように，必要なら ω_1 と ω_2 を入れ替えて，τ の虚数部分 $\mathrm{Im}(\tau)$ は > 0 であるとする．これら二つの周期 ω_1 と ω_2 によって定まるヴァイエルシュトラスの $\wp$-関数を $\wp = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ とする．さらに複素上半平面上で定義された楕円モデュラー関数を $j(w)$ とすれば，その τ における値 $j(\tau)$ が $\wp$ のモデュラスであると思ってよい．また $\wp$ の周期全体は

$$L := \{\omega \in \boldsymbol{C} \mid \wp(z+\omega) = \wp(z)\} = \boldsymbol{Z}\omega_1 + \boldsymbol{Z}\omega_2$$

である．従って $\wp$ のリーマン面 (対応する楕円曲線) は複素トーラス $\boldsymbol{C}/L$ である．二つの複素トーラス $\boldsymbol{C}/L$ と $\boldsymbol{C}/L'$ との間の解析的同型は，ある $\xi \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ を掛けることで得られる；特にこのとき $L' = \xi L = \{\xi\omega \mid \omega \in L\}$ となっている．

さて $\wp$ が虚数乗法を持つのは，複素数 $\alpha \in \boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}$ に対して z の関数 $\wp(\alpha z)$ が再び ω_1 と ω_2 を周期とすることであるから，$\alpha L \subset L$ となる場合である．この α の作用を L の $\boldsymbol{Z}$ - 基底 ω_1, ω_2 で表わせば，ある $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\boldsymbol{Z})$ に対して $\alpha\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ となる．従って α は A の固有値であり，$\boldsymbol{Q}$ 上 2 次の複素数である．よって $k:=\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は虚 2 次体である．また ω_2^{-1} を掛けて，$\alpha\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．これから容易に $\tau \in k$ が得られる．従って特に $M:=\omega_2^{-1}L$ は k の部分加群である．そこで

$$\mathfrak{o}:=\{\alpha \in k \,|\, \alpha M \subset M\}$$

と置くと，これは k のオーダーと呼ばれる部分環であり，M は (分数) $\mathfrak{o}$-イデアルである．二つの $\mathfrak{o}$-イデアル M と M' について，楕円曲線 $\boldsymbol{C}/M$ と $\boldsymbol{C}/M'$ が同型となるのは，ある $\xi \in \boldsymbol{C}-\{0\}$ によって $M'=\xi M$ となる場合である．このとき ξ は k の数であり，二つの $\mathfrak{o}$-イデアル M と M' とは単項イデアル $\xi\mathfrak{o}$ ないし $\xi^{-1}\mathfrak{o}$ を掛けて他に移りあう．このようにして k の $\mathfrak{o}$-イデアル類群が楕円曲線 $\boldsymbol{C}/M$ もしくはそれと同型な $\boldsymbol{C}/L$ と関連する．

このように，虚数乗法を持つ楕円関数から出発すれば，自然に虚 2 次体 k，そのひとつのオーダー $\mathfrak{o}$，および $\mathfrak{o}$-イデアル $M=\boldsymbol{Z}\tau+\boldsymbol{Z}$ が定まる．しかも，拡大 $k(j(\tau))/k$ はアーベル拡大である．ヴェーバーはこのようにして得られる $k(j(\tau))$ を k の「オーダー体 Ordnungskörper」と呼んだ．オーダーが小さくなればなるほどその「オーダー体」は逆に大きくなり，特に最大のオーダー，即ち k の全整数の環に対する「オーダー体」を k の「類体 Classenkörper」と名付けた．この「類体」は k 上不分岐であり，その k 上のガロア群が k のイデアル類群と同型になる ([W-1891]，[W-1897] の第三部)．

ヴェーバーはさらに「分割体 Theilungskörper」を考察した．これは周期の等分点における楕円関数の値をその周期の「オーダー体」に添加して得られる拡大体である．これが「オーダー体」上のアーベル拡大となることは示されたが，この時点ではまだこれの虚 2 次体 k 上での性質は捕えきられてはいなかった．自然数 d による周期の等分点の集合は $d^{-1}M$ で与えられ，そこでの $\wp(z;\tau,1)$ の値は全周期による剰余群 $d^{-1}M/M$ でパラメトライズされる．さて $\xi \in \mathfrak{o}$ を掛けて $\boldsymbol{C}/M$ の自己準同型写像が得られるが，特に $d^{-1}M/M$ の各元を動かさないものは次のように特徴づけられる：

$$\xi d^{-1}\omega \equiv d^{-1}\omega \mod M \qquad (\forall \omega \in M)$$

これは $(\xi-1)d^{-1}M \subset M$ と同値である．ここで話を簡単にするために，$\mathfrak{o}$ が k

の全整数の環であるとしよう．このとき $\mathfrak{o}$-イデアル M は可逆であるから，容易に

$$\xi \equiv 1 \mod d\mathfrak{o}$$

が得られる．さらに自然数 d のかわりに k の整イデアル $\mathfrak{m}$ を取り,「$\mathfrak{m}$ 分点」$\mathfrak{m}^{-1}M$ を考察すれば，まったく同様にして合同関係式

$$\xi \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$$

が得られる．このようにして拡大 $k(j(\tau), \wp(z;\tau,1) \,|\, z \in \mathfrak{m}^{-1}M)/k(j(\tau))$ のガロア群を記述する道具立てとして，mod$\mathfrak{m}$ の合同類別による単項イデアルの剰余群

$$\mathcal{P}(\mathfrak{m})/\mathcal{S}\mathfrak{m},$$
$$\mathcal{P}(\mathfrak{m}) = \{\xi\mathfrak{o} \,|\, \xi \in k,\ \xi \text{ は } \mathfrak{m} \text{ と素}\},$$
$$\mathcal{S}(\mathfrak{m}) = \{\xi\mathfrak{o} \,|\, \xi \in k,\ \xi \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\}$$

が取り出された．

ヴェーバーは [W-1897] でこれらの代数的側面を一般の有限次代数的数体に一般化して展開し，当然 mod$\mathfrak{m}$ の合同イデアル類群

$$\mathcal{I}(\mathfrak{m})/\mathcal{S}(\mathfrak{m}),$$
$$\mathcal{I}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{a} \,|\, \mathfrak{a} \text{ は } k \text{ の分数イデアルで } \mathfrak{m} \text{ と素}\}$$

をも考察し，その位数を調べ，ディリクレ級数を用いていわゆる類体論の「第二不等式」を示している．しかし，その序文からみても，また [W-1897] の第三部がすべて虚 2 次体に当てられていることからしても，ヴェーバーが「クロネッカーの青春の夢」を目指して虚数乗法を持つ楕円関数を通して虚 2 次体を研究して「合同類別」等に行き着いたことに疑問をはさむ余地は無い．

2.5　高木の類体論

ヴェーバーはようやく [W-1908] において虚 2 次体の素イデアルの冪による「分割体」が合同イデアル類群に対応する虚 2 次体上のアーベル拡大であることを示した．ここに至って彼は躊躇無くこの「分割体」を含めて「類体」と総称することとした．従って「クロネッカーの青春の夢」は，虚 2 次体上での「終結定理」，即ち，そのアーベル拡大がすべてこの「ヴェーバーの類体」として把握されるかどうか，にかかるわけである．

フュエター [Ft-1914] は奇数次について,「クロネッカーの青春の夢」に決定的な結果をもたらした．

この結果は高木をいたく刺激したに違いない (彼は学位論文 [T-1903] でガウスの数体に対して「クロネッカーの青春の夢」を証明していた). しかし彼の手にこの論文が届いたとき，まさに第一次世界大戦が始まっていた. ヨーロッパとの学術交流が今まで通りに行われることなどまったく期待できない. 見たいものは自分で見るしかない.

高木は偶数次を含めた一般的な取り扱いをするために彼の合同イデアル類別を与えた；ヴェーバーの合同イデアル類別に，さらにヒルベルトが [Hi-1899b] での相対 2 次拡大の研究において導入した符号条件，即ち「無限素因子による合同」を加えて統合した. あとはアーベル拡大のなかの「類体」を特徴づければよい. そして，予期に反して，彼はたちまち素数次の巡回拡大が分岐条件を通してすべて明確に「高木の類体」として記述できることを見い出した. さらにそれをもとに，数学的帰納法によって，「予想を超越して，アーベル体即ち類体という帰結をもたらし，アーベル体論」に「一段落を画したのである」([T-1948] の序を参照). これにより，「ヒルベルトの類体」に対する「終結定理」も確定し，「クロネッカーの青春の夢」も完全に解決した. すでに 1915 年に彼の類体論の骨格がアナウンスされ ([T-1915])，1920 年に大論文 [T-1920a] が出版された.

以下に必要となる「高木の類体」の定義と結果を略述する. ただし「無限素点」とそれによる合同については省略する.

基礎の有限次代数体 k を定め，その有限次ガロア拡大 K/k をとる. 拡大 K/k で分岐する k の素因子 (素イデアルないし無限素因子) の十分高い羃をすべて掛け合わせて k の整因子 $\mathbf{m}$ を作り，$\mathcal{I}(\mathbf{m})$ と $\mathcal{S}(\mathbf{m})$ を前節と同様に定義する (基礎体 k のオーダーとしては，k の全整数の環を取る). また

$$\mathfrak{I}(\mathbf{m}) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ は } K \text{ の分数イデアルで } \mathbf{m} \text{ と素}\}$$

とすれば K/k のノルム写像 $N = N_{K/k}$ は $\mathfrak{I}(\mathbf{m})$ から $\mathcal{I}(\mathbf{m})$ への準同型写像を与える.

また K を含む k の代数的閉包を定め，その中での k の最大アーベル拡大を $k^{\mathbf{ab}}$ と表わす. 従って $K \cap k^{\mathbf{ab}}$ は K に含まれる k の最大アーベル拡大である.

定理 (高木). アーベル拡大 $K \cap k^{\mathbf{ab}}/k$ のガロア群はイデアル類群 $\mathcal{I}(\mathbf{m})/N(\mathfrak{I}(\mathbf{m}))\mathcal{S}(\mathbf{m})$ と同型である. 逆に k の整因子 $\mathbf{m}$ に対して $\mathcal{I}(\mathbf{m})$ の部分群 $H(\mathbf{m})$ で $\mathcal{S}(\mathbf{m})$ を含むものに対しては，k のアーベル拡大 K で $H(\mathbf{m}) = N(\mathfrak{I}(\mathbf{m}))\mathcal{S}(\mathbf{m})$ となるものが必ず存在する.

定理の前半が「終結定理」であり，後半が類体の「存在定理」である.

2.6 非アーベル的類体論?

さてこの高木の定理において，誰しもが気になるのが $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ の役割である．ハセも後に講義録 [H-1973] で，これを「数学的な美意識から見た欠陥」と述べている．

合同イデアル類群 $\mathcal{I}(\mathfrak{m})/\mathcal{N}(\Im(\mathfrak{m}))\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ は，確かに「十分大きい」k の整因子 $\mathfrak{m}$ に対してはすべて自然に同型となる．しかし，$\mathfrak{m}$ を「小さく」取り過ぎるとこのイデアル類群は小さくなってしまう．実は，アーベル拡大 $K \cap k^{\mathrm{ab}}/k$ が与えられれば，それに対してこの定理の前半が成り立つような「最小の」 $\mathfrak{m}$ が存在する．これが $K \cap k^{\mathrm{ab}}/k$ の「導手」と呼ばれるものである．また定理の後半のように k の整因子 $\mathfrak{m}$ から出発したとしても，$\mathcal{I}(\mathfrak{m})$ の部分群 $H(\mathfrak{m})$ の取り方によっては $\mathfrak{m}$ よりも小さい導手が実現されることもある．

もし (虚数乗法を持つ) 楕円関数を第一の数学的な実体と考えるならば，上に見たように自然に $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ が現われ，少なくともそこに数学的な美意識を苛立たせるようなものはなかろう．また種々のオーダーも自然に現われ，最大のオーダーをことさらに意識する必要もないかも知れない．一般のオーダーについても幾つかの例外的な素イデアルを除きさえすれば因子論に問題が生じることもない．

しかし，虚 2 次体に限らず，すべての有限次代数体 k に対してひとたび高木の定理が証明されてしまったとき，この壮大な高木の類体論に基づく相対アーベル体の理論から自然に導かれるような $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ の役割の意味づけが求めたくなる．

高木は 1920 年のストラスブールでの国際数学者会議において彼の成果を報告したが ([T-1920b])，最後にひとつの問題を提起した；この類体論を非アーベル的なガロア拡大に拡張することが最重要課題であると．「終結定理」を上の定理の前半のように書き上げるならば，自然に非アーベル的な世界に足を踏み出したくなる．高木は [T-1920c] では最も簡単なタイプの非アーベル拡大を取り上げている．

2.7 アルティンの相互法則

高木はさらに続けて [T-1922] において高次冪剰余の相互法則を取り扱い，彼の類体論を駆使してフルトヴェングラーよりも遥かに簡明な処理を見せた．さらに，冪剰余記号が，ある種の合同イデアル類群の同じ類に属する素イデアルについてすべて同一の値を取ることを指摘し，この事実の重要性を強調した．

アルティンは高木の仕事に強い影響を受け，先ず彼の「一般相互法則」を L-関数を通して定式化し ([A-1924])，[A-1927] においてその証明を与えた．彼の「一般相互法則」はそれまでの「相互法則」とは全く外見を異にしたが，その威力は著しく，彼はそれから高次冪剰余の相互法則をいとも簡単に導いた．高木の類体論が持つべき数論的な本質を見事に引き出したものといってよかろう．

アルティンの一般相互法則． 高木類体論における合同イデアル類群とそれに対応す

るアーベル拡大のガロア群との同型写像は，導手と素な各素イデアルにこのアーベル拡大におけるそのフロベニウス写像を対応させることによって得られる．

ここに高木ーアルティンの類体論が一応の完成を見た．その成立過程についてのさらに立ち入った考察については，[M-1994] を参照されたい．

アルティンはこの相互法則を用いて，単項化定理 (ヒルベルトの類体で基礎体のすべてのイデアルが単項イデアルになること) をメタベリアン群の「移送」の問題に帰着させ ([A-1930])，フルトヴェングラーがその証明を果たした ([Fw-1930])．ヒルベルトの類体について予期されたものは，これですべて肯定的に決着した．

3.　「ハセの原理」,「局所ー大域関係」と局所類体論

以下では $\mathfrak{p}$ 進数体，即ち有理数体の p 進完備化 $\boldsymbol{Q}_p$ の有限次拡大体とみなせる数体，が主要な役割りを演じる．しかしその説明を含め，$\mathfrak{p}$ 進解析一般についてはここでは説明を与えない．数学史的な側面については例えば足立 [Ad-1991] を参照されたい．ここでは二点を指摘しておく：(1) ヒルベルトは『数論報文』 [Hi-1897] でクムマーの数論の業績をまとめるにあたり，クムマーが展開した $\mathfrak{p}$ 進的なものについてはそれをまったく無視した ([Ad-1991] 参照)；(2)「ハセの原理」についてはハセ自身がそれを師のヘンゼルに負っていることを [H-1962] で述べている．

3.1　ヒルベルトのノルム剰余記号

「ハセの原理」と「局所ー大域関係」についての理解を助けるため，先ずヒルベルトのノルム剰余記号について見ておこう．上述のようにヒルベルトは $\mathfrak{p}$ 進数体を用いなかったが，ここではそれを用いて説明する．

ヒルベルトは『数論報文』[Hi-1897] で 2 次体論を展開するなかで，各素数 p に対して $\boldsymbol{Q}^{\times} := \boldsymbol{Q} - \{0\}$ で定義された，値 ± 1 をとる 2 変数関数 $\left(\dfrac{a,b}{p}\right)$ を導入した；これは次の諸性質をもつ：

局所ノルム特性：$\left(\dfrac{a,b}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow a = N_p(\xi_p)\,,\ \xi_p \in \boldsymbol{Q}_p(\sqrt{b})$

ただし N_p は $\boldsymbol{Q}_p(\sqrt{b})/\boldsymbol{Q}_p$ のノルム写像である；

ノルム定理：　すべての p に対して $\left(\dfrac{a,b}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow a = N(\xi), \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$

ただし N は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{b})/\boldsymbol{Q}$ のノルム写像である；

積公式：　$\displaystyle\prod_p \left(\frac{a,b}{p}\right) = 1.$

最初の「局所ノルム特性」はいわばこの「ヒルベルト記号」の定義のようなものである．一見明らかではないのだが，この関数は対称性 $\left(\frac{a,b}{p}\right)=\left(\frac{b,a}{p}\right)$ を満たしており，さらにある種の乗法的性質を持っている．「ノルム定理」は，有理数 a が $\boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$ からのノルムになるかどうかについての「ハセの原理」である．古典的な 2 次型式の問題が 2 次体の話に置き換えられたわけである；実際，$\boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$ の数は，$\xi = x + y\sqrt{b}, (x, y \in \boldsymbol{Q})$，と表わされ，従って

$$a = N(\xi), \quad \xi \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{b}) \Longleftrightarrow a = x^2 - by^2, \quad (x, y \in \boldsymbol{Q})$$

である．「2 次型式 $x^2 - by^2$ によって a が表わされるかどうか」が「 a が 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$ からのノルムになるかどうか」となっている．また「積公式」からは $\boldsymbol{Q}$ 上での（即ちガウスの）平方剰余の相互法則が導かれる．これは，大域的な数 $a, b \in \boldsymbol{Q}$ に関しての素数 p ごとに定まる局所的な性質について，それらの間に成り立つひとつの相互関係を与えている．

これらはフルトヴェングラーと高木によってクムマー拡大と高次冪剰余記号の場合に拡張された．

しかし彼等のアプローチにはひとつの窮屈さがあった；次数に応じた 1 の冪乗根が基礎の体に含まれる必要がある．ハセはこれを克服するための方策として単純多元環 (ないしは接合積) とその分裂体に注目した；彼は局所的な考察においていわゆる「ハセの不変量」を (加法的な形で) 導入し ([H-1931])，ブラウアーと E. ネターの協力を得て「多元環の基本定理」を確立し ([BHN-1932])，「局所－大域関係」を与えるものとしてこの不変量についての「和公式」を確立した ([H-1933])．

3.2 局所類体論

ハセは上述の多元環に関する仕事に先立ってノルム剰余記号についての検討を深め，$\mathfrak{p}$ 進数体による局所的な考察のなかから局所類体論を見い出した ([H-1930a, b, c]，特に [H-1930b]，および F. K. シュミットの [Sm-1930])；彼等は大域的な高木－アルティンの類体論を用いて局所類体論を与えた (終結定理と存在定理はシュミットの論文で証明された)．ハセの証言 ([H-1973], p.68) によるならば，E. ネターはこの結果について直ちに，本末を逆転させるべきであると指摘した．即ち構造が簡単な局所類体論を先に独立に証明し，それとノルム記号についての「局所－大域関係」によって複雑な大域類体論を導くべきであると．

このネターの構想が実現すれば当然大域的な類体論に代数的な証明が与えられることになる．シュミットは [Sm-1930] の序文で，彼の終結定理の証明が代数的であることを説明したあと，

これに対して局所類体論の存在定理の証明に際しては有限次代数体のある種

> のアーベル拡大の存在が必要とされるが，これは高木の理論に依拠して，より詳しくは，本質的に超越的な方法によって示されるものである

と述べている．

このようにして局所類体論と「局所－大域関係」によって大域的な高木－アルティンの類体論を構築するという問題と，大域的な類体論，特に第 2 不等式に代数的な証明を与えよという問題が提起された．

以下に必要となる局所類体論の基本的な結果を述べておく．

各素数 p に関する p 進数体 $\boldsymbol{Q}_p$ の代数的閉包をひとつ定め，その部分体となるものを「局所数体」ということにする．また局所数体 k の代数的閉包における最大アーベル拡大を k^{ab} とする．有限次局所数体のガロア拡大 K/k のノルム写像 $N = N_{K/k}$ は位相乗法群 $K^\times$ から $k^\times$ への準同型写像を与え，その像 $N(K^\times)$ は $k^\times$ の開部分群である．このとき

定理．アーベル拡大 $K \cap k^{\mathrm{ab}}/k$ のガロア群と剰余群 $k^\times/N(K^\times)$ とのあいだに数論的に自然な同型写像が存在する．逆に $k^\times$ の位数有限な開部分群 H に対して，アーベル拡大 K/k で $H = N(K^\times)$ となるものが存在する．

局所類体論においては高木の類体論に見る「目障りな」$\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ にあたるものはない．分岐に関すること，ならびにアルティンの相互法則にあたるものについては，ここではその説明を省略して,「数論的に自然な」という言い方で済ませた．

4.　類体論の代数的証明

シュヴァレは，彌永に語ったところによると，学位論文のための研究において第一に「類体論の算術化」を狙っていたという．この方向で類体論の証明を整理したものの，その時点では最終的な目標には至らなかった．それでも学位論文 ([Ch-1933a] として出版) では，少なくとも局所類体論の「高木理論」によらない直接的な証明を与えることに成功した．シュヴァレ [Ch-1933b] の脚注によると，これについてはシュミットも一応の成果を得ていたようだが出版はされなかったようである．

この「類体論の算術化」は，結局シュヴァレにより [Ch-1940] で達成される．この論文ではまたイデールによる表現が高木－アルティンの類体論に与えられた．しかし「類体論の算術化」とイデールの導入とは数学的には独立した事柄である．これについては彌永 [Iy-1969] に詳しいので，ここでの立ち入った検討を略す．

5. イデールの導入と定着

前節に続いてここでもシュヴァレが立役者となる．ここでのテーマに関しても筆者は彌永からシュヴァレが彼に直接語ったといういくつかの事柄を聴くことができた．彌永は 1931 年にハムブルクのアルティンのもとに留学した．そこでシュヴァレと出会い，二人は以後長く続くこととなる親交を結んだ．

5.1 イデール誕生

シュヴァレが語ったところによると,「イデール idèle」という造語はハセの提案によるものであった．この概念はまず [Ch-1936] で導入されたが，ここでは「élément idéal」という言葉が用いられた．プリュファー [P-1925] の「ideale Grö$\mathfrak{z}$e」あるいはデデキントの「イデアル Ideal」，さらにさかのぼってクムマーの「理想数 ideale complexe Zahl (ないし ideal Primfactor)」を意識したものであろうか．結局 [Ch-1940] で「イデール idèle」が採用された．シュヴァレは彌永に「合同類別」の煩わしさを克服するのがその目的のひとつであったと語ったという．発想としては，合同イデアル類群 $\mathcal{I}(\mathfrak{m})/(\mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$ を大きくして行ったときの「ある種の極限」を意図したものであろうか．シュヴァレは [Ch-1936] でプリュファー [P-1925] に言及し，自分の「éléments idéaux」の集合はプリュファーの「ideale Grö$\mathfrak{z}$en」の集合の部分集合として捉えることが出来るとしている．このプリュファーの論文では，代数的数体に対して，そこでの無限個の合同方程式系

$$\xi \equiv \alpha \pmod{\kappa}, \qquad \xi \equiv \beta \pmod{\lambda}, \qquad \xi \equiv \gamma \pmod{\mu}, \cdots$$

が必ず解を持つような「ideale Grö$\mathfrak{z}$e」ξ 全体からなる環が考察されている．またこのような取り扱いをするならば，当然無限次のアーベル拡大を扱わなければならない．実際，論文 [Ch-1936] の題名は

Généralization de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies (類体論の無限次拡大への一般化)

である．すでにクルルは [Kl-1928] で無限次拡大のガロア理論を展開して，ガロア群にいわゆる「クルル位相」を導入していた．さらに例えばクルルの [Kl-1932] にも見られるように，このころには付値論も十分に展開されている．無限素因子に対してもすでに通常の絶対値によるアルキメデス的な付値が対応づけられ，実数体 $\boldsymbol{R}$ ないし複素数体 $\boldsymbol{C}$ がそれによる完備化として捉えられている．

ここでシュヴァレによる「élément idéal」の定義を紹介しておこう．

有限次代数的数体 k において，各素因子 $\mathfrak{p}$ によるその $\mathfrak{p}$ 進完備化 ($\mathfrak{p}$ 進数の全体) を $k_{\mathfrak{p}}$ とし，その乗法群を $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ とする；ただし無限素因子としては k の複

素数体 $\boldsymbol{C}$ への埋め込みに対応してひとつずつ k の無限素因子 $\mathfrak{p}(\infty)$ を対応させ，$k_{\mathfrak{p}(\infty)}$ としては k の像が実数体 $\boldsymbol{R}$ に含まれるときは $\boldsymbol{R}$ を，含まれないときは $\boldsymbol{C}$ を取る．有理数体 $\boldsymbol{Q}$ については唯一の無限素因子 ∞ があり，$\boldsymbol{Q}_\infty = \boldsymbol{R}$ である．有限素因子 $\mathfrak{p}$ について $k_{\mathfrak{p}}$ の全整数の環を $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ とし，その単数の群を $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ とする；$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ の唯一の極大イデアルは単項イデアルであるから，その生成元 π を取り，それのすべての冪からなる群を $\langle\pi\rangle$ とする；これは有理整数の加法群 $\boldsymbol{Z}$ と同型である．単数群 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ には自然に $\mathfrak{p}$ 進位相が入っており，それによってコムパクト群になる；また $k_{\mathfrak{p}}^\times$ から引き起こされる $\langle\pi\rangle$ の位相は離散的であり，$k_{\mathfrak{p}}^\times$ は直積位相群 $\langle\pi\rangle \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ と同型である．無限素因子については，$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ に対応するものとして，$k_{\mathfrak{p}(\infty)} = \boldsymbol{C}$ については $\boldsymbol{C}^\times$ を，$k_{\mathfrak{p}(\infty)} = \boldsymbol{R}$ については正の実数の乗法群 $\boldsymbol{R}_+^\times$ を取る．

定義．代数的数体 k のすべての素因子 $\mathfrak{p}$ にわたる $k_{\mathfrak{p}}^\times$ の直積の要素 $(a_{\mathfrak{p}})$ で，ほとんどすべての (すなわち有限個を除いたすべての) $\mathfrak{p}$ に対しては $a_{\mathfrak{p}}$ が $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ に属しているものを k の「élément idéal」という．

一点の瑕瑾をあげれば，シュヴァレにおいてはイデール群の位相については必ずしも十分に考察されてはいなかったかと思われる．

5.2　イデールによる類体論

ここでは定性的に理解しやすいアデール環を導入したうえで，イデール群による類体論について説明する．

アデール環：有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ に，自明でないイデアル全体 $\{n\boldsymbol{Z} \mid n \in \boldsymbol{Z}, \neq 0\}$ を 0 の基本近傍系として位相を与え，その完備化を $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ と書くことにする；これは，すべての素数 p にわたる p 進整数環 $\boldsymbol{Z}_p$ の直積とみなせ，コムパクトな位相環である．これと無限素因子に対応する $\boldsymbol{Q}_\infty = \boldsymbol{R}$ をあわせて，アデール環 $\boldsymbol{A}$ が得られる：

$$\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{Z}} \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{Q}_\infty, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = \Pi_p \boldsymbol{Z}_p.$$

各 p 進数体 $\boldsymbol{Q}_p = \boldsymbol{Z}_p \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}$ は直積因子として $\boldsymbol{A}$ に自然に埋め込まれる．有理数体 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{A}$ に「ダイアゴナル」に埋め込まれるものとする．

有限次代数体 k に対し，$k_{\boldsymbol{A}} := k \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{A}$ を k のアデール環という．また k の素因子 $\mathfrak{p}$ について，k の $\mathfrak{p}$ 進完備化 $k_{\mathfrak{p}}$ は $k \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}_p$ の直積因子であり，従って $k_{\boldsymbol{A}}$ にその直積因子として埋め込まれる．ただし p は $\mathfrak{p}$ が割る $\boldsymbol{Q}$ の素数である．

イデール群：有限次代数体 k に対し，k のアデール環 $k_{\boldsymbol{A}}$ の単数群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ を k のイデール群という．各 $\mathfrak{p}$ 進完備化 $k_{\mathfrak{p}}$ の乗法群 $k_{\mathfrak{p}}^\times$ は直積因子として $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ に自然に

埋め込まれ，乗法群 $k^\times$ は $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ に「ダイアゴナル」に埋め込まれているものとする．このとき $k^\times$ は離散的な閉部分群になる．剰余群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times/k^\times$ は k のイデール類群と呼ばれる．無限素因子全体に対応する直積因子を $k_\infty^\times$，その単位元を含む連結成分を $k_{\infty_+}^\times$ と書くことにする；$k_\infty^\times$ は環 $k_\infty := k\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}_\infty = k\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$ の単数群であり，$\boldsymbol{C}^\times$ ないし $\boldsymbol{R}^\times$ の直積である；また $k_{\infty_+}^\times$ は $\boldsymbol{C}^\times$ ないし $\boldsymbol{R}_+^\times$ の直積であり，剰余群 $k_\infty^\times/k_{\infty_+}^\times$ は k の数の符号分布に対応する．従って k のアーベル拡大を直接類体論によって統制する限りでは $k_{\infty_+}^\times$ は不要であり，剰余群 $k_\infty^\times/k_{\infty_+}^\times$ が本質的である．イデール群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ の部分群 $k^\times\cdot k_{\infty_+}^\times$ はもはや閉集合ではない；$k_\infty^\times\cdot k_{\infty_+}^\times$ の $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ 内での閉包を $k^\#$ と表わすことにする：

$$k^\# = \overline{k_\infty^\times\cdot k_{\infty_+}^\times}.$$

剰余群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times/k^\#$ が直接 k のアーベル拡大を統制する．なお有限素因子 $\mathfrak{p}$ に関しては，イデール群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ の直積因子 $k_{\mathfrak{p}}^\times$ は $k_{\mathfrak{p}}^\times\cap k^\# = \{1\}$ を満たす．従って，各 $k_{\mathfrak{p}}^\times$ は二つの剰余群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times/k^\times$ および $k_{\boldsymbol{A}}^\times/k^\#$ に自然に埋め込まれていると見なされる．

局所類体論：有限次局所数体 $k_{\mathfrak{p}}/\boldsymbol{Q}_p$ に対し，$\boldsymbol{Q}_p$ の代数的閉体での $k_{\mathfrak{p}}$ の最大アーベル拡大を $k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ とし，そのガロア群を Gal $(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}})$ とする；これはクルル位相によるコムパクト群である．また $k_{\mathfrak{p}}$ の最大不分岐アーベル拡大を $k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}}$ とする．このとき，位相群の連続な準同型写像 $\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}: k_{\mathfrak{p}}^\times \to \mathrm{Gal}((k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}})$ で次の性質を持つもの（局所アルティン写像）が存在する：

(i) $\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}$ は単射であり，像 $\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}(k_{\mathfrak{p}}^\times)$ は Gal $(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}})$ 内で稠密である (即ち，このガロア群内での $\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}(k_{\mathfrak{p}}^\times)$ の位相的閉包 $\overline{\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}(k_{\mathfrak{p}}^\times)}$ は群全体 Gal $(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}})$ と一致する)；

(ii) $k_{\mathfrak{p}}^\times = \langle\pi\rangle\times\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ と分解したとき，$\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times)$ は惰性群 Gal $(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}})$ と一致する．また加法群 $\boldsymbol{Z}$ と同型な離散位相群 $\langle\pi\rangle$ については，その像のガロア群内での位相的閉包 $\overline{\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}(\langle\pi\rangle)}$ は $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \Pi_q\boldsymbol{Z}_q$ と同型である．

大域類体論：有限次代数体 k の最大アーベル拡大を k^{ab} とする．このとき連続な開準同型写像 $\alpha_k : k_{\boldsymbol{A}}^\times \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$ で次の性質を持つもの (アルティン写像) が存在する：

(i) α_k は全射であり，Ker $(\alpha_k) = k^\#$ である；即ち，$k_{\boldsymbol{A}}^\times/k^\# \cong \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$.

(ii) 各素因子 $\mathfrak{p}$ に対し，Gal $(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}})$ を $\mathfrak{p}$ の分解群として自然に Gal (k^{ab}/k) に埋め込む写像を $\rho_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$ とし，$k_{\mathfrak{p}}^\times$ を自然に $k_{\boldsymbol{A}}^\times$ に埋め込む写像を $\iota_{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}^\times \to k_{\boldsymbol{A}}^\times$ とする．このとき $\alpha_k\circ\iota_{\mathfrak{p}} = \rho_{\mathfrak{p}}\circ\alpha_{k_{\mathfrak{p}}}$ が成り立つ．

(iii) k^{ur} を k のヒルベルト類体 (狭義最大不分岐アーベル拡大) とするとき，α_k によって Gal (k^{ur}/k) は剰余群 $k_{\boldsymbol{A}}^\times/\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\cdot k_\infty^\times\cdot k^\#$ と同型になり，$\alpha_k(\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\cdot k_\infty^\times) =$

$\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k^{\mathrm{ur}})$ である．

このイデールによるフォーミュレイションにより，類体論における「ハセの原理」が見事に与えられた．即ち，イデール群 $k_{\boldsymbol{A}}^{\times}$ に「ダイアゴナル」に埋め込まれた大域数 $k^{\times}$ が，各素因子 $\mathfrak{p}$ についての局所類体論をすべて束ねて大域類体論を構築するために必要な局所類体論相互の関係を決定する．

なお，この観点から代数体の最大冪零拡大を扱う試みが [M-1992] で与えられている．

5.3 イデールの定着

シュヴァレ [Ch-1940] によって類体論にイデールによる表現が与えられたあと，もうひとつの転機が，まったく独立になされた岩澤 [Iw-1950] とテイト [Ta-1950] によってもたらされた．彼等はイデール群における位相構造を注意深く吟味し，さらにイデール類群 $k_{\boldsymbol{A}}^{\times}/k^{\times}$ 上で関数解析を展開し，L - 関数の取り扱いに新機軸をもたらした．特に無限素因子に対する $k_{\infty}^{\times}$ にも新たな意味を与えた．これらの L - 関数の関数等式には，いわゆる Γ - ファクターが現われて重要な役割りを担うが，$k_{\infty}^{\times}$ はこの Γ - ファクターの寄与を自然に説明した．

このようにして「イデール」は数論の自然言語として定着した．例えば，このあとさらにアデールが導入され，ヴェイユ [Wl-1959] によって「アデール幾何学」に確固たる地位が与えられる，等々．しかしこの先はもはや今回の我々の考察の枠を超えることになろう．

参考文献

[Ad-1991] 足立恒雄．$\mathfrak{p}$ 進解析の系譜，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 1 (1991),32 - 42.

[A-1924] E.Artin.Über eine neue Art von L - Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3 (1924), 89-108 = Collected Papers, 105-124.

[A-1927] ____. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 353-363 = Collected Papers, 131-141.

[A-1930] ____. Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Abh. Math.Sem. Univ. Hamburg, 7 (1930), 46-51 = Collected Papers, 159-164.

[A-1965] ____. The Collected Papers, Addison Wesley, 1965.

[BHN-1932] R.Brauer, H. Hasse & E.Noether. Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Jour. reine angew. Math. 167 (1932), 399-404.

[Ch-1933a] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et dans les corps locaux, J. Fac. Sci. Tokyo Imper. Univ., Sec. I-2 (1933), 363-476.

[Ch-1933b] ____. La théorie du symbole de restes normiques, Jour.reine angew. Math. 169 (1933), 140-157.

[Ch-1936] ____. Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, Jour. de Math. pure appl. 15 (1936), 359-371.

[Ch-1940] ____. La théorie du corps de classes, Ann. of Math. 41 (1940), 394-418.

[Ch-1954] ____. CLASS FIELD THEORY, Nagoya Univ., 1954.

[F-1989] G. Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory, in The History of Modern Mathematics, edited by D. E. Rowe and J. McCleary, Academic Press, 1989, pp.425-450.

[Ft-1914] R. Fueter. Abel'sche Gleichungen in quadratisch - imaginären Zahlkörpern, Math. Ann. 75 (1914), 177-255.

[Fw-1904] Ph.Furtwängler. Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l - ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, Math. Ann. 58 (1904), 1-50.

[Fw-1907] ____. Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 63 (1907), 1-37.

[Fw-1909] ____. Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern I, Math. Ann. 67 (1909), 1-31 ; II, 72 (1912), 346-386 ; III, 74 (1913), 413-429.

[Fw-1911] ____. Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1911), 293-317.

[Fw-1930] ____. Beweis des Hauptidealsatzes für Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 14-36.

[H-1926] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper I, Jber. Deutschen Math.-Ver.(1926); Ia, (1927), 1-134 ; II, (1930), 1-204.

[H-1930a] ____. Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols, jour. reine angew. Math. 162 (1930), 134-144.

[H-1930b] ____. Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen, Jour. reine angew. Math. 162 (1930), 145-154.

[H-1930c] ____. Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper, Jour. reine angew. Math. 162 (1930), 169-184.

[H-1931] ____. Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. 104 (1931), 495-534.

[H-1933] ____. Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. 107 (1933), 731-760.

[H-1962] ____. Kurt Hensels entscheidender Anstoß zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, Jour. reine angew. Math. 209 (1962), 3-4.

[H-1967] ____. History of Class Field Theory, in ALGEBRAIC NUMBER THEORY ed. by J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, Acad. Press Inc., London, 1967, pp.266-279.

[H-1973] ____. Class Field Theory, Collection Mathématique No.11, Département de Mathématiques, Université LAVAL, 1973.

[Hi-1897] D. Hilbert. Bericht : Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jber. Deutschen Math.- Ver. 4 (1897), 175-546 = Ges.Abh.I, 63-363.

[Hi-1898] ____. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. Akad.Wiss. Göttingen 5 (1898), 377-399 = Acta Math.Stochh. 26 (1902), 99-132 = Ges. Abh.I, 483-509.

[Hi-1899a] ____. Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper, Jber. Deutschen Math. Ver. 6 (1899), 88-94 = Ges. Abh. I, 364-369.

[Hi-1899b] ____. Über die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers, Math. Ann. 51 (1899), 1-127 = Ges. Abh. I, 370-482.

[Iw-1950] K. Iwasawa. A note on L - functions, Proc. International congress of Math., 1950, p.322.

[Iw-1990] ____. On papers of Takagi in number theory, Appendix I to [T-1973, 2nd edit.] (1990), 342-351.

[Iy-1969] 彌永昌吉. 類体論の成立, 彌永昌吉編『数論』付録 2, 岩波書店, 東京, 1969, pp.448-487.

[Iy-1990] S. Iyanaga. On the life and works of Teiji Takagi, Appendix III to [T-1973, 2nd edit.] (1990), 354-371.

[K-1853] L. Kronecker. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Monatsber. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1853), 365-374 = Werke IV, 1-11.

[K-1857a] ____. Über die elliptische Functionen, für welche complex Multiplication stattfindet, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1857), 455-460 = Werke IV, 177-183.

[K-1857b] ____. Brief an G. L. Dirichlet vom 17 Mai 1857, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1885), 253-297 = Werke V, 418-421.

[K-1862] ____. Über die complex Multiplication der elliptischen Functionen, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1862), 363-372 = Werke IV, 207-217.

[K-1880] ____. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind, Werke V, 455-457.

[K-1882] ____. Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen, J. reine angew. Math.92 (1882), 1-122 = Werke II, 237-388.

[K-1895] ____. Mathematische Werke I-V, Leipzig, 1895-1930 ; Reprint, Chelsea, New York, 1968.

[Kl-1928] W. Krull. Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Ann.100 (1928), 687-698.

[Kl-1932] ____. Allgemeime Bewertungstheorie, Jour. reine angew. Math. 167 (1932), 160-196.

[M-1988] K. Miyake. The capitulation problem, Sugaku Expositions Vol.1 (1988), No.2, 175-194.

[M-1989] ____. A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters, Expo. Math. 7 (1989), 347-358.

[M-1992] ____. Galois Theoretic Local-Global Relations in Nilpotent Extensions of Algebraic Number Fields, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, 1989-90, (ed. by S.Davis), Birkhäuser, 1992, pp.191-207.

[M-1994] ____. The Establishment of the Takagi-Artin Class Field Theory, in The Intersection of History and Mathematics (ed. J.W.Dauben et al), Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 1994, pp.109-128.

[M-1991] 三宅克哉. デデキントの数論について, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 1(1991), 22-31.

[M-1992] ____. アルティンの相互法則について, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 4(1992), 44-53.

[M-1993] ____. フロベニウス自己同型について, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 6(1993), 31-43.

[M-1994] ____. 代数的数論 — Zolotareff の場合, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 8(1994), 4-17.

[P-1925] H. Prüfer. Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Ann. 94 (1925), 198-243.

[Sm-1930] F. K. Schmidt. Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen, Jour. reine angew. Math. 162 (1930), 155-168.

[Sr-1927] O. Schreier. Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1927), 1-6.

[T-1903] T. Takagi.Über die im Bereiche der rationalen komplexen Zahlen Abelscher Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo 19(1903), 1-42 = Collected Papers, 13-39.

[T-1915] ____. Zur Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper I, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Ser.II, 8 (1915), 154-162 ; II, 243-254 = Collected Papers, 43-50, 51-60.

[T-1920a] ____. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo 41(1920), 1-133 = Collected Papers, 73-167.

[T-1920b] ____. Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques, Comptes rendus du congrès internat. math., Strasbourg (1920), 185-188 = Collected Papers, 168-171.

[T-1920c] ____. Sur les corps résolubles algebriquement, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t.171 (1920), 1202-1205 = Collected Papers, 172-174.

[T-1922] ____. Ueber das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörpei J. Coll. Sci. Tokyo 44 (1922), 1-50 = Collected Papers, 179-216.

[T-1973] ____. The Collected Papers, Iwanami Shoten, 1973 ; the 2nd edit., Springer-Verlag, 1990.

[T-1942] 高木貞治. 近世数学史談及雑談, 共立出版社, 東京, 1933.

[T-1948] ____. 代数的整數論, 岩波書店, 東京, 1948.

[Ta-1950] J. Tate. Fourier analysis in number field and Hecke's zeta-functions, Thesis, Princeton Univ., 1950.

[Ta-1952] ____. The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math. 56 (1952), 293-297.

[Ts-1926] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1926), 191-228.

[W-1886] H. Weber. Theorie der Abelschen Zahlkörper I, Acta Math. Stokh. 8 (1886), 193-263 ; II, 9 (1887), 105-130.

[W-1891] ____. Elliptische functionen und algebraische zahlen, Braunschweig, 1891.

[W-1897] ____. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern I, Math. Ann. 48 (1897), 433 - 473 ; II, 49 (1897), 83-100 ; III, 50 (1898), 1-26.

[W-1908] ____. LEHRBUCH DER ALGEBRA, Vol.III, Braunschweig, 1908 ; (the second edition of [W-1891]).

[Wl-1959] A. Weil. Adéles and algebraic groups, Lecture Notes, Princeton, 1959.

第10章

20世紀数学基礎論の成果と展望

倉田令二朗

1. 数学基礎論とは

数学基礎論は大まかにいって次の4つの分野に分かれている.

(1) 証明論 (Proof Theory)

(2) モデルの理論 (Model Theory)

(3) 帰納的関数と述語の理論 (Recursion Theory)

(4) 公理論的集合論 (Axiomatic Set Theory)

がそれである. これらを順を追って説明していこう.

1° 証明論 その背景をなす**形式主義的公理主義**

証明論とはその名の通り, 証明自身を対象として研究する分野のことであるが, 証明ないし証明可能という概念を定義するためには数学の各分野を形式化された公理系として再構成することが必要であり, それを可能にするのが形式主義的公理主義という一つの立場である. 対象化された証明という概念は, この立場にもとづき, 基本概念の確定 —— 公理化 (この間に項, 論理式の概念が出てくる), 論理の公理と推論規則などを経て定義されるというかなり大がかりな仕事を必要とする. これらを一つ一つ見ていこう.

形式主義的公理主義の諸契機
— その歴史的背景 —

19世紀, カントールやデデキントなどの努力によって新興の集合論はめざましい成果をもたらしたが, 前世紀の終りから今世紀の初めにかけてパラドクス (論理的逆説) が続出し, 基礎の危機と呼ばれる時代を迎える. これを克服すべきものと

して提唱された一つの立場がヒルベルト (Hilbert) による形式主義的公理主義の立場である.

(1) 公理主義，そのための基本概念の確定

基礎の危機の時代にあっては人は公理主義に向かう．確実な基礎の上に立ち，既知のパラドクスから自由で，しかもこれまでの肯定的成果はすべて導かれるような公理系を選ぼうとする.

算術 (自然数論) にはすでにペアノ (Peano) によるものがあった (1889) が，集合論はツェルメロ (Zermelo) によって，その当時までのパラドクスを意識した上ではじめて公理化された (1908).

(i) 特定の数学分野の言語

しかし公理化のためにはまず，数学の各特定分野の基本概念 (定数，関数，述語) を抽出し，確定し，記号化する必要がある.

たとえば，平面幾何学では

$L(a)$ (a は直線である)

$P(a)$ (a は点である)

$O(a,b)$ (a は b の上にある — $P(a), L(b)$ のとき —)

$B(a,b,c)$ (a は bc の間にある — $P(a), P(b), P(c)$ のとき —)

が基本的述語として与えられる.

自然数論 N の場合.

定数として 0．関数として $(\ \ )'$ (a' は $a+1$ を表す)，$(\ \ )+(\ \ ), (\ \ )\cdot(\ \ )$，述語として $(\ \ )=(\ \ )$ が与えられる.

集合論 Z の場合.

$(\ \ )=(\ \ ), (\ \ )\in(\ \ )$ が与えられる (定数と関数はない).

このように数学の特定分野に固有な基本概念を表す記号をその分野の**言語 (Language)** というが，記号としてはこの他に,

(ii) 論理記号

$\neg$ (でない)，$\vee$ (あるいは)，$\wedge$ (そして)，$\rightarrow$ (ならば)，$\forall$ (すべての)，$\exists$ (存在する)

(iii) 自由変数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, **束縛変数** $x_1, x_2, \cdots$ (いずれも可算)

自由変数は当の分野の任意の対象を表す (N の場合は任意の自然数を，Z の場合は任意の集合を表す．束縛変数は $\forall x \exists x$ の形で $\forall\exists$ とコミで用いられる).

(iv) カッコ，コンマ等の補助記号

ここで公理系 N と Z の概略をあげよう (詳細は拙著『数学基礎論へのいざない』参照のこと).

公理系 N

$a' = a+1, a+b, a\cdot b$ に関する自明の関係式 N(1) ~ N(8) の他に,

N(9) 数学的帰納法

$A(a)$ を自然数 a に関する任意の性質とするとき

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x')) \longrightarrow \forall x A(x)$$

公理系 Z

Z(1) 外延性の公理

Z(2) 等号公理

Z(3) 空集合の公理

Z(4) 対の公理

Z(5) 合併の公理

Z(6) ベキ集合の公理

Z(7) 無限集合の公理

Z(8) 分出公理

Z(9) 選択公理

(2) 項 (term) と論理式 (formula)

N(9) における自然数 a に関する性質 $A(a)$ とは何か？　あいまいである．同様のことは Z でも起こる．

Z の分出公理とは「任意の集合 a と，集合 b に関する任意の性質 $A(b)$ に対し，集合 $\{x | x \in a \wedge A(x)\}$ が存在する，すなわち $\forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge A(x))$ となる集合 c が存在する」ことを要請する．この場合も集合 b に関する性質というのもあいまいである (あとの問題では現実の歴史の上でも相当騒がれた)．

N の項と論理式　N の項とは定数 0 と自由変数に関数 $(\ )', (\ )+(\ ), (\ )\cdot(\ )$ を有限回ほどこしてできるものをいう．$t_1 = t_2$ (t_1, t_2は項) の形のものを N の原子論理式 (atomic formula) という．一般の N の論理式は原子論理式から出発し，すでに論理式 A_1, A_2 が定まったとき，

$$\neg(A_1), \quad (A_1) \vee (A_2), \quad (A_1) \wedge (A_2), \quad (A_1) \to (A_2)$$

を作るという操作，および $A(a)$ (a は自由変数) が論理式として定まったとき

$$\forall x(A(x)), \quad \exists x(A(x))$$

を作るという操作を有限回くりかえして得られるものをいう．自然数に関する有意義な命題を形式化したものに他ならない．

Z の項と論理式　Z の項は自由変数のみであり，原子論理式は $a = b$, $a \in b$ (a, b は自由変数) の形のみである．A_1, A_2 から $\neg(A_1)$, $(A_1) \vee (A_2)$, $(A_1) \wedge (A_2)$, $(A_1) \to (A_2)$ および $A(a)$ から $\forall x(A(x))$, $\exists x(A(x))$ を作るやり方は N の場合と同様である．

こうして N(9) の $A(a)$, Z(8) の $A(b)$ はいずれも N ないし Z の論理式であるということによって保留していた問題は一応の決着がつく.

(3) 無定義概念

たとえば N の定数や関数とは何か, いかに定義されるかという問に対し, ヒルベルトは**無定義**だと答える. この点が古典的公理主義と形式主義的公理主義を分かつ点である.

(i) 諸概念の定義をより根源的なものに還元していった場合, これ以上, 他に還元できない概念に到達するのは当然である. 点とは部分をもたないものであるという定義が『ユークリッド原本』にあるが,「部分」なるものの定義はない.

(ii) われわれは N での 0 や+, · について内容的理解やイメージをもっている. Z における ∈ についても同様である. しかしこの内容やイメージを (カッコに入れて) 使用しないのである (現象学的還元). これによってわれわれは関係を顕在化するのである.

(iii) 基本記号はそれ自身無内容であって, その意味は公理で示される関係を通じて, いやむしろこの公理系から展開される諸結果の総体を通じて陰伏的に (implicit に) 示されるというべきだろう.

証明可能概念を定義するためには N や Z その他の公理系に共通な論理と推論規則が必要である. これが第 1 階述語論理計算 (1st order predicate calculus) であり, 論理の公理 (1) ~ (10) と推論規則 $R1, R2, R3$ よりなる.

(4) 論理の公理と推論規則

論理の公理

$A \to (B \to A)$ をはじめとし, $A \wedge B \to A, A \to A \vee B$ など $\neg, \vee, \wedge, \to$ に関する自明の式 H(1) ~ H(8) および

H(9) $A(t) \longrightarrow \exists x A(x)$ (t は項)

H(10) $\forall x A(x) \longrightarrow A(t)$ (t は項)

(詳細は『数学基礎論へのいざない』参照のこと)

推論規則

$$R1 \quad \frac{A \quad A \to B}{B}$$

$$R2 \quad \frac{A(a) \to C}{\exists x A(x) \to C}$$

$$R3 \quad \frac{C \to A(a)}{C \to \forall x A(x)}$$

$R2, R3$ において自由変数 a は下式にあらわれない.

ただし, 上の $A, B, C, A(a)$ などは今問題にしている特定分野の論理式を表す (この体系を H ということにする).

(5) 証明可能の定義

今や N ないし Z の論理式 A が N ないし Z で証明可能である ($\mathrm{N}\vdash A$ ないし $\mathrm{Z}\vdash A$ と書く) ということが定義される.

N または Z の公理および論理の公理は N または Z で証明可能である.

推論規則の上式が N (ないし Z) で証明可能ならば下式も N (ないし Z) で証明可能である.

以上述べてきたことは任意の基本概念 (定数関数述語) をもつ公理系に一般化することができる.

(6) 一般理論

一般の場合**言語** L は**定数**のクラス $(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha\in A}$, **述語**のクラス $(\boldsymbol{p}_\beta)_{\beta\in B}$, **関数**のクラス $(\boldsymbol{f}_\gamma)_{\gamma\in C}$ として与えられる.

ここで添字の集合 A, B, C は無限集合でもありうる. p_β, f_γ の各にはそれぞれ変数の個数が指定されているとする. 他の基本的記号すなわち論理記号, 自由変数, 束縛変数記号および補助記号は N や Z の場合と同じ形で与えられているとする.

このとき **L 上の項**および**論理式**が定義される (項は定数 c_α と自由変数から出発して, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ が項で f_γ が n 変数関数記号ならば, $f_\gamma(t_1, \cdots, t_n)$ も項であるといった具合に. また $t_1, \cdots, t_n$ が項で p_β が n 変数述語記号ならば $p_\beta(t_1, \cdots, t_n)$ は原子論理式であるといった風に. 原子論理式から一般の論理式を定義するやり方は N や Z の場合と同様である.

L 上の論理式をいくつか選び (無限個でもよい) **公理系** T を定義する.

この見地からは, 特定の数学分野は L と T のペア $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$ に他ならない.

A を L 上の論理式とするとき $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle \vdash A$ (または $\mathrm{T}\vdash A$) (**A は T で証明可能**である) は T の論理式と論理の公理から出発して有限回の推論規則を適用して得られることとして定義される.

自由変数を含まない論理式のことを**文 (sentence)** という. 公理系 T の論理式はつねに文であるように選べることが簡単にわかる.

最後に $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$ が**無矛盾**であるとは $\mathrm{T}\vdash A$ かつ $\mathrm{T}\vdash \neg A$ となる L 上の論理式 A は存在しないこと, $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$ が**完全**であるとは L 上の任意の文 A に対し, $\mathrm{T}\vdash A$ か $\mathrm{T}\vdash \neg A$ が成立つこととして定義される.

2° モデルの理論

(1) 言語の解釈

言語 $\mathrm{L}=\{c_\alpha, p_\beta, f_\gamma\}$ (以下ではしばしば $\alpha\in A$, $\beta\in B$, $\gamma\in C$ を省略する) の解釈 M とは組 $\langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M \rangle$ のことである. ここに D はある集合, $c_\alpha\in D$, p_β が n 変数のとき $p_\beta^M\subseteq D^n$, f_γ が n 変数のとき f_γ^M は関数 : $D^n\to D$ である. p_β

には (n 変数のとき) D^n から { 真偽 } への関数を対応させ，p_β^M はその真理集合 (値が真になるような D^n の部分集合) とみなすのである

(2) 自由変数の指定

L の解釈 $M = \langle D, c_\alpha^M, p_\beta^M, f_\gamma^M \rangle$ が与えられたとする．L 上の項 t，論理式 A が自由変数をもつときは M を与えただけでは，t の D における値，A の M における真偽は一般には定まらないので，有限個の自由変数 $a_1, \cdots, a_n$ に対する指定 (assignment) ないしは付値 (evaluation) を考える．それを

$$e = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad (ここに\ x_i \in D) \qquad または \qquad x_i = e(a_i)$$

と書く．自由変数 $a_1, \cdots, a_n$ に D の元 $x_1, \cdots, x_n$ を代入しなさいという趣旨である．

t または A が e で指定される自由変数のみを含むとき，e は t または A を覆うという．

(3) $t^M[e]$ と $M \models A[e]$

L の解釈 M と自由変数に対する指定が与えられたとする．e が L 上の項 t，論理式 A を覆うとき M, e のもとでの t の値をあらわす $t^M[e] \in D$，および「A は M, e のもとで真」をあらわす $M \models A(e)$ が定義される．

$t^M[e]$ の定義

(i) t が定数 c_α のとき，$t^M[e] = c_\alpha^M$

(ii) t が自由変数 a_i のとき，仮定によって a_i は e によって指定されている．このときは $t^M[e] = e(a_i)$

(iii) t が $f_\gamma(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，仮定によって e は $t_1, \cdots, t_n$ を覆うから $t_1^M[e], \cdots, t_n^M[e] \in D$ は定義されている．このとき $t^M[e] = f_\gamma^M(t_1^M[e], \cdots, t_n^M[e])$.

$M \models A[e]$ の定義

(i) A が原子論理式 $A = p_\beta(t_1, \cdots, t_n)$ のとき

$$M \models A[e] \iff \langle t_1^M[e], \cdots, t_n^M[e] \rangle \in p_\beta^M$$

(ii) A に対してすでに定義されているとき

$$M \models (\neg A)[e] \iff M \models A[e]\ でない.$$

論理式 A, B に対してすでに定義されているとき

(iii) $M \models (A \wedge B)[e] \iff M \models A[e]$　かつ　$M \models B[e]$

(iv) $M \models (A \vee B)[e] \iff M \models A[e]$　あるいは　$M \models B[e]$

(v) $M \models (A \to B)[e] \iff M \models A[e]$ 　ならば　$M \models B[e]$

$\iff M \models A[e]$ 　でないか　$M \models B[e]$

付値 $e = \begin{pmatrix} a_1, & \cdots, & a_n \\ x_1, & \cdots, & x_n \end{pmatrix}$ と $a_1, \cdots, a_n$ と異なる自由変数 b に対し，付値 $e' = \begin{pmatrix} a_1, & \cdots, & a_n, & b \\ x_1, & \cdots, & x_n, & x \end{pmatrix}$ のことを $e\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}$ と書く．

$\forall x A(x) \exists x A(x)$ にふくまれない自由変数 b に対し

(vi) $M \models \forall x A(x)[e] \iff$ すべての $x \in D$ に対し $M \models A(b)\left[e\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}\right]$

(vii) $M \models \exists x A(x)[e] \iff$ ある $x \in D$ が存在して $M \models A(b)\left[e\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}\right]$

(4) 充足可能　恒真

L 上の論理式 A が充足可能とは，L 上の解釈 M と A を覆う e があって $M \models A[e]$ となること．

A が恒真 ($\models A$ と書く) とは，L の任意の解釈 M と A を覆う任意の付値 e に対して $M \models A[e]$ となることだと定義する．明らかに次のことが成り立つ．

$$A(a_1, \cdots, a_n) \text{ が充足可能} \iff \exists x_1 \cdots \exists x_n A(x_1, \cdots, x_n) \text{ が充足可能}$$

$$A(a_1, \cdots, a_n) \text{ が恒真} \iff \forall x_1 \cdots x_n A(x_1, \cdots, x_n) \text{ が恒真}$$

$$A \text{ が恒真} \iff \neg A \text{ が充足可能でない．}$$

(5) モデル

A が文のとき指定 e は問題にならないから $M \models A[e]$ のことを単に $M \models \varphi$ と書く．$M \models A$ のとき M は A のモデルであるという．

T を L 上の文のみからなる公理系とする．すべての $A \in \mathrm{T}$ に対して $M \models A$ のとき M は T のモデルであるという．

証明論との対比および証明論とモデルの理論の系譜については『数学基礎論へのいざない』を参照されたい．

3° 帰納的関数と述語

計算可能とは何であるかを課題にするのがこの分野である (ある意味で基礎論は「証明」と「集合」と「計算」を対象にする学問だといってもよい)．

以下の議論は自然数に関する直観的内容的な判断に基づく議論であって，形式的自然数論に関するものではない．論理記号も単なる形式としてでなく内容的な判断を示しているから別の記号を用いることにしよう．

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall x, \exists x, \leftrightarrow,$$

の代わりに

$$^{-}, \&, \vee, \rightarrow, (x), (Ex), \equiv$$

を用いる． A の否定は $\bar{A}$ で表す． $\vee$ と $\rightarrow$ は形式的記号と同じだが，前後関係から混同することはあるまいと思われる．

(1) 原始帰納的関数 (Primitive Recursive Function)

次にあげる 3 つの始関数から出発し，合成と原始帰納的定義を有限回くりかえして得られる，もっとも基本的な計算可能関数であり，ゲーデル (Gödel) が不完全性定理を証明するために展開したものである (1931).

始関数 は次の 3 種類の関数である．

(i) $\varphi(x) = x'(= x + 1)$

(ii) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = q$(定数，自然数)

(iii) $\varphi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i \,(1 \leq i \leq n)$

(iv) **合成**

m 個の n 変数関数 $\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n)$ と 1 つの m 変数関数 $\psi(x_1, \cdots, x_m)$ から

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$$

によって φ を作ること．

原始帰納的定義

(v)(a) 関数 $\chi(x, y)$ と定数 q が与えられたとき

$$\begin{cases} \varphi(0) = q \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)) \end{cases}$$

によって φ を定義すること．

(v)(b) $n > 1$ のとき関数 $\psi(x_1, \cdots, x_{n-1}), \chi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ が与えられたとき

$$\begin{cases} \varphi(0, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_2, \cdots, x_n) \\ \varphi(y', x_2, \cdots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

によって φ を定義すること．

原始帰納的述語 (Primitive Recursive Predicate)

$R(x_1,\cdots,x_n)$ を n 変数述語 (任意の $x_1,\cdots,x_n$ に対して真偽が定まっている) とする.

$$R(x_1,\cdots,x_n) \Longleftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=0$$
$$\bar{R}(x_1,\cdots,x_n) \Longleftrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=1$$

をみたす関数 f のことを R の**表現関数**という. 表現関数が原始帰納的であるような述語を**原始帰納的述語**という.

多くの初等整数論的関数や述語が原始帰納的であることが知られている.

$a+b$, $a\cdot b$, a^b, $a!$ はもとより $\mathrm{rm}(a,b)$ (a を b で割った余り), $[a/b]$ (a を b で割った商), p_i ($i+1$ 番目の素数を表す関数), $\mathrm{Prim}(a)$ (a は素数である) 等々である.

形式的自然数論との関係　表現定理

x を自然数とする. x に対応する N の項, 0 に (　)′ が x 個ついたもの ($0^{(x)}$ とも書く) のことを x に対応する数項 (numeral) といい, $\bar{x}$ であらわす.

原始帰納的述語 $P(x_1,\cdots,x_n)$ に対し自然数論 N の論理式 $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_n)$ があって,

(i) $P(x_1,\cdots,x_n) \Longrightarrow \mathrm{N}\vdash \mathrm{P}(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})$

(ii) $\bar{P}(x_1,\cdots,x_n) \Longrightarrow \mathrm{N}\vdash \neg\mathrm{P}(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})$

さらに

(iii) $P(x_1,\cdots,x_n) \Longleftrightarrow \mathrm{N}\vdash \mathrm{P}(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})$ も成り立つ.

ここに $\bar{x_1},\bar{x_2}\cdots,\bar{x_n}$ は $x_1,\cdots,x_n$ に対応する数項である.

原始帰納関数に対してもやや詳しいこれと同様な関係が成り立つ. また N のかわりにこれより弱い有限の公理からなる Robinson system と呼ばれる N_0 に対しても成り立つことが知られている (これらについては『数学基礎論へのいざない』参照). 上のことを述語 $P(x_1,\cdots,x_n)$ は N において**各数ごとに表現される (numeralwise representable)** という.

後に触れることになるので最小作用素による関数の定義を用いる μ - 帰納関数を定義しよう.

(2) μ - **帰納関数**

(i) μ - **作用素による定義**

$n+1$ 変数関数 $\chi(x_1,\cdots,x_n,y)$ に対し, 条件 $(x_1)\cdots(x_n)(Ey)(\chi(x_1,\cdots,x_n,y)=0)$ のもとで

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=(\mu y)(\chi(x_1,\cdots,x_n,y)=0)$$

を作ること.

μy は $\chi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$ をみたす最小の y を指す.

μ - **帰納関数**とは始関数 (1), (i), (ii), (iii) から出発し, (1), (iv) 合成と原始帰納的定義 (1), (v)(a), (v)(b) および μ-作用素による定義を有限回適用して得られる関数のことである.

(3) **一般帰納関数と述語** (General Recursive Function(Predicate))

(i) **ゲーデルの示唆と種々の一般化の試み, 帰結**

1933 年のプリンストン講演において, ゲーデルは原始帰納関数をさらに一般的な計算可能関数に拡張する問題にふれ,「計算可能関数とはアルゴリズム (計算手順) が存在するような関数である」とした上で問題はいかにしてアルゴリズムを数学的に定義するかにあると問題提起した.

それに応じて計算可能関数の一般的定義の試みが 1935 年から 6 年にかけていっせいに出現する. すなわち

Church の λ - definable function (1935)

Kleene の general recursive function (1936)

Turing の computable function (1936)

Gödel の reckonable function(1936)

Post の normal system (1943)

これらはすべて同値であり, さらに上述の μ - 帰納関数と同値であることが示された (以下これらを一括して一般帰納的関数ということにする).

(ii) **チャーチ (Church) の提唱** (1936)

さまざまな一般化の試みがすべて同値であったこと.

すでに知られている計算可能関数はすべて一般帰納的であること. さらに一般化しようという試みがすべて失敗したことなどをふまえ, チャーチは次の提唱を行った.

「計算可能関数とは一般帰納的関数のことであり, 決定可能述語とは一般帰納的述語 (表現関数が一般帰納的関数であるもの) のことである.」

ところで計算可能関数というものは常識的で経験的な概念で, 一方, 一般帰納的関数とは厳密に数学的に, あるいは超数学的に定義されたものなのであるから, これを同一視することは根拠を示すことはできるにしても, 原理的に証明することは不可能なことであって, この提唱はいわば「ホモサピエンスの計算能力に対する仮説」という性格のもので, きわめてユニークなものである. 現在, 反対する人もいるが納得できる反例はなく, ひろく承認されている.

(iii) **クリーニ (Kleene) の 2 つの基本定理とそれからの帰結**

この方面ではクリーニの 2 つの基本定理,「**標準型定理**」(1936) と「**枚挙定理**」(1943) が基本的である. これから次のことが導かれる.

$(Ey)R(x,y)$ — ここに $R(x,y)$ は一般帰納的述語 — の形の述語を帰納的可算述語 (recursively enumerable predicate) というが，次のことが成り立つ.

「帰納的でない帰納的可算述語が存在する」

(iv) 一般帰納的関数 (述語) に対しても原始帰納的関数 (述語) に関すると同じ形の各数ごとの表現定理が成り立つ (以上『数学基礎論へのいざない』参照のこと).

4° 公理論的集合論

はじめに集合論の展開とともに明らかになってきた集合とクラスの区別についてふれておこう.

(1) 集合とクラス

Z の任意の論理式 A(a) に対し，$A = \{x|A(x)\}$($A(x)$ を満足する x の全体) を考え，これをクラス (Class 類) と呼ぼう．集合 a は $a = \{x|x \in a\}$ だからつねにクラスであるが，クラスは一般には集合にはならない．初期のパラドクスはたいてい集合とクラスの混同から生じたといってよい (個々の場合について『数学基礎論へのいざない』にある).

(2) ZF　ZFC　BG

公理論的集合論の代表は **ZF(ツェルメロ・フレンケル集合論)**，**ZFC(AC(選択公理)** つき **ZF**) および **BG**(ベルナイス・ゲーデルの集合論) である.

ZF はツェルメロの公理 Z から AC(選択公理) を取り除き，それに**置換公理** (フレンケル (Freankel) が 1922 年に提唱した公理) および 正則性公理 (ノイマン (Neumann) が 1925 年に提唱した公理) を付加したものである.

ZFC は ZF +AC のことである.

BG はクラス概念に基づく公理系であって，ZF の論理式 A(a) (Z の論理式と同じ) に対する $\{x|A(x)\}$ の存在やクラス間の演算などの存在を保証する.

(3) 順序数 (Ordinal,Ordinal number)

順序数の概念は公理論的集合論の中ではじめて公認される厳密な規定を受け取る.

(i) **定義**

$$\mathrm{Ord}(a)(a\text{ は順序数である}) \iff \begin{array}{l}\text{(i) Trans}(a)(a\text{ は推移的 } (\forall x \in a)(x \subseteq a))\\ \text{(ii) } a \text{ は } \in \text{ に関して整列集合である.}\end{array}$$

これはノイマン，R. ロビンソン流の定義である．空集合 $\emptyset$ は順序数となるが，これを 0 で表す．一般に順序数を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ で表す.

$$\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta$$

として $<$ を導入するのである.

(ii) **基本性質**

上の定義から順序数の基本性質が導かれる．すなわち比較可能性，空でない順序数のクラスにおける最小数の存在，超限帰納法の原理，順序数の集合における上限の存在など.

順序数は第 I 種 (直前の要素があるもの) と第 II 種 (そうでないもの) に分けられ，ω (自然数全体の集合) は最小の第 II 種順序数として定義され，整列可能定理 (任意の集合 a に対して順序数 α と a から α への双射が存在する) が ZFC で証明可能なことなどが示される.

(iii) **基数**

まず集合 A の**濃度** (Cardinality)$|A|$ は $A \simeq \alpha$ (双射が存在する) となる最小の順序数 α として定義され，濃度になりうる順序数として**基数** (Cardinal,Cardinal number) が定義される．濃度に関してカントールが示した数々の成果が公理論的集合論のもとで再現され，連続体仮説，一般連続体仮説が完全に定式化される.

(4) ZF のモデルと相対無矛盾性

一般にクラス M を考え原子論理式 $a = b, a \in b$ を M における $x = y, x \in y$ 自身で解釈することによって ZF の論理式 A と自由変数の指定 e に対して $M \models A[e]$ が定義される．ところで $M \models A[e]$ 自身が ZF の論理式で書けるから，公理論的集合論では証明論とモデルの理論が交叉する．たとえば，次のような A の ZF$-A$ に対する**相対無矛盾性** (ZF$-A$ が無矛盾なら ZF$+A$ も無矛盾であること) といった証明論的問題がモデル論的手法を用いて解かれる．A の ZF$-A$ に対する相対無矛盾性を証明するには ZF$-A$ においてクラス M を定義し，M が ZF$+A$ のモデルであることを ZF$-A$ の中で証明すれば，十分である．この方法は最初ノイマンによってモデル R による正則性公理の他の公理に対する相対無矛盾性の証明に用いられ，ゲーデル，コーエンの仕事に継承されることになる.

以上のことは数学基礎論シリーズ中の倉田・篠田共著『公理論的集合論』を参照のこと.

2.　数学基礎論の古典的成果

(1) 命題論理計算の研究 (Post 1921)．その**健全性 (Soundness) 定理**と**完全性 (Completeness) 定理**

(2) Löwenheim-Skolem の定理 (1915,1920)

L が可算であるような公理系 $\langle$ L, T $\rangle$ のモデルがあれば可算モデルがある.

(3) **述語論理の完全性定理 (Gödel 1930)**

$$\models A \Longleftrightarrow \vdash A \,\mathrm{in}\, \mathrm{H} \quad (\text{の} \Longrightarrow)$$

$A\,\mathrm{in}\,\mathrm{H}$ は論理式 A が特別な数学の公理なしに H の公理と推論規則のみから証明可能であることを示す.

(4) **不完全性定理 (Gödel 1931)**

(5) **LK と LJ の提出，自然数論の無矛盾性の証明 (Gentzen 1934-1938)**

(6) **帰納的関数と述語の理論 (Gödel,Kleene(1936-1943),Church(1936)**

(7) **AC と GCH の ZF に対する相対無矛盾性 (Gödel 1938)**

[説明]

1° 命題論理計算における健全性と完全性

命題論理計算とは命題変数と呼ばれるものから $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ のみを有限回ほどこして得られる命題論理式を対象とし，公理は論理の公理の (1) ~ (8) のみ，推論規則は $R1$ のみからなる体系を指し，これを H_0 という．命題論理式 A 中の命題変数に任意の真偽を代入しても結果がつねに真になるとき A は恒真であるといい，$\models A$ で表す.

Post の定理は

$$\vdash A \,\mathrm{in}\, \mathrm{H}_0 \Longleftrightarrow \models A \qquad (\Longrightarrow \text{は健全性,} \Longleftarrow \text{は完全性を表す})$$

2° Löwenheim-Skolem の定理

この定理はまず数学理論 $\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle$ の非範疇性 (対象を一意的に定め得ない) を示すものとして認識論的に意義がある．またこの定理の保証する可算モデルは多くの技術的利点をもたらす.

3° 完全性定理

上で述べた記号の意味は §1.2° で説明した通りである．また §1.2°(4) で説明したことを用いて

$$\{A\} \text{は無矛盾} \Longleftrightarrow A \text{は充足可能である (モデルがある)}$$

が成り立つ.

これを極度に一般化した次の定理が成り立つ.

$$\langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle \text{は無矛盾} \Longleftrightarrow \langle \mathrm{L}, \mathrm{T} \rangle \text{のモデルがある.}$$

$\Longrightarrow$ の方は**強完全性定理**または**モデルの存在定理**と呼ばれる．今日では T の極大無矛盾拡大を通して行う Henkin(ヘンキン) 流が汎通的である.

4° 不完全性定理

$\langle$ L, T $\rangle$ は実質的に N_0 を含む ω-無矛盾な帰納的公理系とする (N_0 は R.Robinson の弱い自然数論，帰納的公理系とは T の文のゲーデル数の集合が帰納的であること).

このとき

(a) T は不完全である．すなわち T$\vdash A$ でも T$\vdash \neg A$ でもない L 上の文 A が存在する (第一不完全性).

(b) さらに $\langle$ L, T $\rangle$ が実質的に N(帰納法をもった強い系) を含むならば T の無矛盾性を主張する N の文 Con[T] は T では証明できない (第二不完全性).

なお次のことも不完全性定理から導かれる.

(c) 与えられた L に対し，任意の L 上の論理式 A に対し，$\vdash A$ in H か否かは決定不可能である.

証明の基本になるゲーデル数化，超数学の算術化などについては『数学基礎論へのいざない』を見られたい.

5° Gentzen の業績

Gentzen は H より扱いやすい 1 階述語論理 LK, LJ を提唱し，ここでのカット消去定理，中間式定理を証明した (1935 ~ 6). 次いで自然数論 N の無矛盾性を，最初の ε-数までの超限帰納法によって証明した (1938). (たとえば竹内・八杉『証明論入門』参照).

6° 帰納的関数の理論

これに関する Gödel, Kleene, Church などの寄与については §1.3° で述べた通り.

7° AC; GCH の相対無矛盾性

§1.4° で説明した方法と同様．ZF の中で構成的集合のクラス L を作り，L $\models$ AC, L $\models$ GCH を示すことによって証明したのである (Gödel 1938).

3. 20世紀後半の発展と基礎論の役割 (主として算術から)

以下に筆者が比較的なじんだ部分から 7 項目を列挙する．ただし，算術に片寄ったかなり主観的なもので，公理論的集合論に関する Martin-Steel-Woodin，モデル論に関する Shelah の仕事などが省かれている.

(1) Nonstandard model の各分野への応用 (1960 年頃から始まる)
(2) GCH の ZFC からの，AC の ZF からの独立性 (Cohen 1963)
(3) Hilbert 第 10 問題の否定的解釈 (Matijasevič 1970)

(4) NP-complete 述語の発見 (Cook 1975)
(5) Paris-Harrington Principle(1977)
(6) 制限算術による Computer Science の問題の基礎論化
(7) その他の Separation 問題への取り組み

[**注釈**]

1° Non standard model

もともとは ⟨ L, T ⟩ の非範疇性に関連して発見されたものだが，A.Robinson の "Non Standard Analysis"(1960) によって広く知られるようになり，この方法はやがて数学内部の問題にとどまらず，量子力学などの分野にまで広く適用されるようになった．たとえば，中村徹氏の『超準的方法によるファインマン経路積分』(基礎論シリーズ)．

2° Cohen の業績 (GCH の ZFC からの，AC の ZF からの独立性の証明)

おそらく 20 世紀後半における基礎論の最大の成果であり，コーエン革命と呼ばれている．

基本的には §1.4° で説明した方法で，ZFC に対する ¬GCH の，ZF に対する ¬AC の相対無矛盾性を証明するのだが，そこで用いられるのは， R や L といった特別のものではない Generic Model というきわめて自由度の高いモデルの類であって，そこから人は目的にかなうようなモデルを選ぶというきわめて柔軟性の高い方法を提供するものであった．

3° Hilbert の第 10 問題の否定的解釈

Hilbert の第 10 問題とは

「整係数多項式 $P(x_1, \cdots, x_n) = 0$ が整数解をもつか否かを判定するアルゴリズム (決定可能な係数に関する条件) を求めよ」

答「そのようなアルゴリズムは存在しない」

というものである．

ディオファントス述語

$$D(x) \Longleftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n P(x, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

であって帰納的でないものがあることを，

「帰納的可算集合はディオファントス的である」

をまず証明し，これから導くのである (チャーチの提唱をバックにしていることに注意)．

4° NP-complete 述語の発見 (Cook)

言語 $\tilde{\mathrm{L}} \in \Sigma_f^*$ が NP-complete であるとは $\tilde{\mathrm{L}} \in \mathrm{NP}$ であって，任意の $\mathrm{L} \in \mathrm{NP}$ に対し，$\mathrm{L} \leq_m^p \tilde{\mathrm{L}}$ となること，すなわち

$f \in$ PTC(polynomial time computable function) があって，

$$x \in \mathrm{L} \Longleftrightarrow f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}$$

となることである (小林孝次郎『計算の複雑さ』(昭晃堂) 参照)．Cook は L sat(前掲書参照) が NP-complete であることを示したが，これから次のことがわかる．

Pr[H_0] を命題論理計算 H_0 で証明可能な命題論理式のゲーデル数全体とするとき

$$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Longleftrightarrow \mathrm{Pr}[\mathrm{H}_0] \in \mathrm{P}$$

$$\mathrm{NP} = \text{co-}\mathrm{NP} \Longleftrightarrow \mathrm{Pr}[\mathrm{H}_0] \in \mathrm{NP}$$

5° **Paris-Harrington Principle**

ゲーデル数化も超数学の算術化も経ることなしに，あるふつうの算術の問題 (組み合わせ問題) の N からの独立性の単刀直入な証明 (3°, 5° に関しては倉田・篠田『入門への補遺』参照)．

6° これについては竹内外史『証明論と計算量』(裳華房) 参照．

7° Håstad, Ajtai, Belanton, Pitassi, Urquhart らの仕事を指す．

以上，見てきたように 20 世紀後半に入って数学基礎論は Non standard method の拡がりにおいて，難問題の結着のつけ方において，Computer science との関連において数学全般の中で無視できない重要部門であることが広く認識されるに至った．算術内分離問題，独立性問題に関して集合論における Cohen の方法に匹敵する普遍的方法の発見が今後の課題となるだろう．

第11章

超準数学の思想
— A. ロビンソンから E. ネルソンへ —

齋藤正彦

本稿は，超準数学を創始した A. ロビンソンおよびその枠組に重大な転回をもたらした E. ネルソンの思想 —— 実数とか集合論とか現実世界とかについての考えかた —— を，明確な証拠なしに推察して比較考察すること，およびそれについての私の考えを少し述べることを目的とする．

超準数学の上記ふたつの枠組については簡単に解説する．

1.　前史

1°　無限小解析は，創始された瞬間から大変なスピードで発展し，19 世紀がはじまるまでには，特にオイラーの天才により，現代実解析の基礎がほぼすべてできたと言ってよい．

しかし，無限小解析の論理的基礎はあやふやなままで，つねに批判にさらされ，つねに合理化の試みがなされてきた．そして周知のように，コーシーを経てヴァイエルシュトラスに至って，$\varepsilon-\delta$ 式基礎づけが確立する．これによれば，実関数 f が点 a で連続であることはつぎのように表現される：

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x[\,|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon].$$

これによって仮想実体としての無限小量は追放されてしまった．けれども，人の心のなかには無限小量のようなものが有り続けたし，それは発見的方法としては有効だったので，なんとか実体としての無限小量を復活させたいという願望を持ち続けた人もいた．

2°　もし無限小量 dx があったとすれば，それは何倍しても依然として無限小なのだから，dx を含む体ないし環はアルキメデス的ではない．実は，実数体 $\boldsymbol{R}$ を含む非アルキメデス順序体はいくらでもある．たとえば，実係数の形式的ローラン

級数体 $K = \boldsymbol{R}((X))$ がそうである．しかし，実関数 f を K 上の関数に自然に延長する仕方はないし，これを使って無限小解析ができるとは思えない．

実際に使われたのは体ではなく，実数列全部の作る環だった．Schmieden & Laugwitz [2] は，これを使って無限小解析を合理化することに一応成功した (1958 年)．しかしその理論は晦渋をきわめる．また，無限小解析を一歩進めるたびに定義に立ちかえる必要もあり，実用可能なものではない．

3° 無限小解析を真の意味で合理化し，さらにそれを超えて超準数学を準備する思想は，従来の解析学とはまったく別の領域ではぐくまれた．その最初の表現は多分 1934 年のスコーレム [1] にある．彼は自然数論がカテゴリカルでないことを示し，有名なスコーレム・パラドックスを提示した．

その後急速に発展したモデル理論にもとづき，1960 年ごろに A. ロビンソンがついに現在の超準数学を創始することになる．

2. A. ロビンソンの超準解析

1° ロビンソン流の超準解析をそのまま紹介するのは少し面倒くさいので，それを集合論的に簡単化して述べる．

実数体 $\boldsymbol{R}$ を含む大きな集合 U で，集合論的操作に関して閉じているもの (これをツェルメロ宇宙という) を考える．

U の元全部を表わす記号を定項としてもつ論理式の全体を $\mathcal{L}$ とする．解釈に際し，束縛変項の変域は U とする．$\mathcal{L}$ の文 ϕ がこの解釈で真のとき，$\models \phi$ と書く．

四つ組 $(U, {}^*U, {}^*\in, *)$ を考える．${}^*U$ は集合，${}^*\in$ は ${}^*U$ 上の二項関係，$*$ は U から ${}^*U$ への写像である．$*(a)$ を ${}^*a$ と書く ($a \in U$)．

言語 $\mathcal{L}$ に ${}^*U - \{{}^*a\,;\, a \in U\}$ の元を表わす記号を付け加えた言語を ${}^*\mathcal{L}$ と書く．${}^*\mathcal{L}$ の論理式の $*$ 解釈とは，U の元を表わす定項 a は ${}^*a$ と解釈し，$\in$ は ${}^*\in$ と解釈し，束縛変項の変域を ${}^*U$ とするものである．文 ϕ が $*$ 解釈で真のとき，${}^*\models \phi$ と書く．

2° **公理 1** (移行の原理，Transfer) $\mathcal{L}$ の任意の文 ϕ に対して

$$\models \phi \Longleftrightarrow {}^*\models \phi.$$

すなわち ${}^*U$ は U の数学のモデルである．

公理 2 (広大性または弱い共起性または理想元の存在，Idealization) $\phi(x, y)$ を $\mathcal{L}$ の 2 変項論理式，A を U の部分集合とする．A の任意有限個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，U の元 b で $\models \phi(a_i, b)$ $(1 \leq i \leq n)$ となるものが存在すると仮定する．このとき ${}^*U$ の元 β が存在し，A のあらゆる元 a に対して ${}^*\models \phi(\alpha, \beta)$ となる．

もっと強い公理 (飽和性または強い共起性，Saturation) もあり，またそれを簡易化した公理 (可算飽和性) もあるが省略する．

任意のツェルメロ宇宙 U に対し，公理 1,2 をみたす四つ組 $(U, {}^*U, {}^*\in, *)$ は存在する (選択公理を使う)．それにはある種の超フィルターによる超冪というものを作ればよいのだが，それも省略する．

3°　公理 1,2 からすぐ出る結果を述べる．

(1)　無限大超自然数 (${}^*\boldsymbol{N}$ の * 元) が存在する．すなわち，自然数 a と ${}^*a$ とを同一視した上で，$\boldsymbol{N}$ のどの元よりも大きい ${}^*\boldsymbol{N}$ の元 (実は * 元) が存在する．実際，$\phi(x, y)$ として

$$y \in \boldsymbol{N} \wedge x < y$$

をとると，ϕ は $\boldsymbol{N}$ で有限共起的だから，${}^*U$ のある元 β をとると，$\boldsymbol{N}$ の任意の元 a に対して ${}^*\models \phi(a, \beta)$ ，すなわち $\beta\ {}^*\in {}^*\boldsymbol{N}$ かつ $a\ {}^*< \beta$ となる．□

注意　$\in$ と ${}^*\in$ とは別のものだが，繁雑さを避けるために同一視して話を進める．

(2)　0 でない無限小超実数が存在する．実際，

$$y \in \boldsymbol{R} \wedge y > 0 \wedge y < x$$

は正実数の全体で有限共起的であり，公理 2 が適用される．${}^*\boldsymbol{R}$ を超実数体，その元を超実数という．二つの超実数 α, β の差 $\alpha - \beta$ が無限小のとき，それらは互いに限りなく近いと言い，$\alpha \approx \beta$ と書く．

(3)　有限超実数はある実数に限りなく近い．

証明 α を有限超実数とする．$A = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ x \leq \alpha\}$ とおくと，A は空でなく，上に有界だから上限 a がある．簡単にわかるように $\alpha \approx a$ となる．□

4°　**定理**　実関数 f が一点 a で連続であるためには，a に限りなく近い任意の超実数 ξ に対して ${}^*f(\xi) \approx f(a)$ となることが必要十分である．

証明　($\Longrightarrow$) 正実数 e および $\xi \approx a$ が与えられたとする．仮定により，ある正実数 d を取ると，文 ϕ ：

$$\forall x\, [\, |x - a| < d \longrightarrow |f(x) - f(a)| < e\,]$$

は真だから，移行の原理によって ${}^*\models \phi$ ．x を ξ とすれば，$|\xi - a| < d$ だから $|{}^*f(\xi) - f(a)| < e$ となり，e は任意だから ${}^*f(\xi) \approx f(a)$ ．

($\Longleftarrow$) 正実数 e が与えられたとする．文 ϕ を

$$: \exists d > 0\, \forall x\, [\, |x - a| < d \longrightarrow |f(x) - f(a)| < e]$$

として，$\models \phi$ を示せばよい．$^*U$ で，正の無限小 δ をとる．$|\xi - a| < \delta$ なら $\xi \approx a$ だから，仮定によって $^*f(\xi) \approx f(a)$ ，したがって $|^*f(\xi) - f(a)| < e$ ，すなわち $^*\models \phi$ ．公理 1 によって $\models \phi$ となる．□

この書きかえを使って中間値の定理を証明してみよう．

定理　実関数 $f : [a\,, b] \to \boldsymbol{R}$ は連続とする． $f(a) < 0, f(b) > 0$ なら，$f(c) = 0$ となる c がある．

証明　無限大超自然数 λ をとり，$[a\,, b]$ を λ 等分する:

$$\gamma_\nu = a + \frac{\nu}{\lambda}(b - a) \qquad (0 \leq \nu \leq \lambda).$$

$^*f(\gamma_\nu) < 0$ なる最大の ν を μ とすると，$\mu < \lambda, {}^*f(\gamma_\mu) < 0, {}^*f(\gamma_{\mu+1}) \geq 0, \gamma_\mu \approx \gamma_{\mu+1} \approx c$ なる実数 c を取ると，前定理により，

$$f(c) \approx {}^*f(\gamma_\mu) < 0 \leq^* f(\gamma_{\mu+1}) \approx f(c)$$

だから $f(c) = 0$ ．□

3.　ネルソンの内集合論 (IST)

1°　上述したモデル論的な方法だと，ツェルメロ宇宙 U を固定してから超準世界 $^*U$ を作らなければならない．U がいくら大きくても，それはひとつの集合にすぎないから，これが全数学を包摂するわけではなく，その意味でこの方法は局所的である．

1977 年，E.Nelson[6] は集合論全部を一挙に超準化する方法を考えた．このやりかただと，たとえば実数体 $\boldsymbol{R}$ と別に $^*\boldsymbol{R}$ があるのではなく，$\boldsymbol{R}$ の中にすでに無限小実数が入っていることになる．

ツェルメロ-フレンケルの集合論に選択公理を加えた理論を ZFC と書く．ネルソンの理論 (IST:Internal Set Theory) の言語は，ZFC の言語にひとつの単項述語 st (standard の略) を加えたものである．述語 st を含まない論理式を**内的** (internal), st を含む論理式を**外的** (external) という．以下，$\forall^{\text{st}}x$ は《あらゆる standard な x について》と読み，$\exists^{\text{st}}x$ は《standard な x が存在する》と読む．

内集合論 IST の公理は，ZFC の公理全部に，つぎの三つの公理図を付け加えたものである．

T : (移行,Transfer)　内的論理式 $\phi(x, t_1, \cdots, t_k)$ に対し，

$$\forall^{\text{st}} t_1 \cdots \forall^{\text{st}} t_k \left[\forall^{\text{st}} x\, \phi(x, t_1, \cdots, t_k) \longleftrightarrow \forall x\, \phi(x, t_1, \cdots, t_k) \right].$$

I : (理想化，Idealization)　内的論理式 $\phi(x, y, t_1, \cdots, t_k)$ に対し，

$$\forall^{\text{st}} z(\text{有限}) \exists x \forall y \in z\, \phi(x, y, t_1, \cdots, t_k) \longleftrightarrow \exists x \forall^{\text{st}} y\, \phi(x, y, t_1, \cdots, t_k).$$

S : (標準化, Standardization)　任意の (外的でもよい) 論理式 $\phi(z, t_1, \cdots, t_n)$ に対し,

$$\forall^{\mathrm{st}} x\, \exists^{\mathrm{st}} y\, \forall^{\mathrm{st}} z\, [\, z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge \phi(z, t_1, \cdots, t_k)\,].$$

公理 T, I はそれぞれほぼ前節の公理 1, 2 に当る.

標準化の公理でパラメーター $t_1, \cdots, t_n$ を省略すると, $\phi(z)$ と x に対し, y はひとつしかない. これを ${}^{\mathrm{S}}\{z \in x\,;\, \phi(z)\}$ と書く.

2°　無限大自然数や無限小実数の存在は前節と同様に証明される. $\boldsymbol{R}$ の完備性を表わす定理の証明には公理 S を使う.

定理　有限実数 (絶対値がある標準実数より小さいもの) はある標準実数に限りなく近い.

証明　α を有限実数とする. ある標準実数 M に対して $-M < \alpha < M$ となる. $A = {}^{\mathrm{S}}\{x \in \boldsymbol{R}\,;\, x \leq \alpha\}$ とおく. A は $\boldsymbol{R}$ の標準部分集合で空でなく, 上に有界である. したがって上限 a が存在する. a は標準実数である (公理 T). 簡単にわかるように $\alpha \approx a$ となる. □

定理　標準実関数 f が標準点 a で連続であるためには, 任意の実数 $\xi \approx a$ に対して $f(\xi) \approx f(a)$ となることが必要十分である.

証明はまったく同じ.《標準》という条件がついているのが気になるかもしれないが, 次の中間値の定理を見てみよう.

定理　実関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は連続とする. $f(a) < 0, f(b) > 0$ なら, $f(c) = 0$ となる実数 c がある.

証明　これは ZFC の定理だから (すなわちこの定理を表わす論理式には述語 st が入っていないから), 公理 T により, f, a, b は標準的と仮定してよい. したがって前定理が使え, 証明は前節のものとまったく同じである. ただ超自然数を自然数に, 実数を標準実数に変えるだけでよい. □

3°　以上, 無限小解析の入口の入口だけを, ふたつの方法で超準化してみせたが, この調子でどこまででも進める. 超準数学を研究するのにどちらの枠組を使うかは, ほとんど個人の好みや慣れ具合によるだけである. しかし, そのことの意味を考えると, 事情は多少変わってくる.

4.　実世界の表象としての実数

1°　これから, あいまいなことをあいまいに書くことをお許しいただきたい.

ひとは実数というものをどのように捉えているのだろうか. 自分のことを考えてみても, これは必ずしもはっきりしない.

もっとも素朴には，長さをはかることによって得られる数値の集まりだろう．これは，たくさんの無理数 ($\sqrt{n}$ とか π とか) を含む順序体と考えられる．

これを 3 次元化することによって，おなじみの物理空間の表象としての実数が得られる．しかし，そこで解析学を展開するためには,《すきま》があってはまずいので，完備順序体の原概念に達することになる．

数学者であっても，普段は実数体 $\boldsymbol{R}$ をこのようなものとして扱っている．

基礎を反省する必要に迫られたとき，はじめて数学者は (順序) 完備な順序体として実数体を特徴づける．アルキメデス的実閉体でもよい．いずれにせよ，集合論の枠のなかでは，実数体は (同型を除いて) ひとつに決まる．

これが数学者の合意事項である．語る主題と相手によって立場を微妙に変えればよい．

集合論の枠をはずしてしまうと状況は一変する．自然数さえも，形式的に記述できる可算個の公理によってその一意存在を保証することはできない．これこそ，スコーレムがはじめて認識したことであり，超準数学の端緒を開いた定理である．

2° 無限小解析に戻る．ロビンソンがたびたび引用するライプニッツは無限小量を導入した人だが，それをあたかも虚数のような仮想的な対象と考えていたらしい．

ロビンソンは，合理的に存在する無限小量を最初に見た人ではあるけれども，思想的にほぼライプニッツの見かたを踏襲しているように思える．もちろん証拠はない．

数学的にはきちんと存在していても，現実の世界には対応していない，と感じていたような気がする．ロビンソンにとっては，現実世界の表象はあくまでコーシー以来のあの実数 —— かつて私がコーシー・パラダイムと名付けた実数のイメージ [10] —— だったように思われるのだ．

コーシーの実数は $0, 1, \sqrt{2}, \pi$ などを含むほか，決して具体的には構成できない無数の点をもつ直線であり，そうなれば 0 をどこへ移してもよい，すなわち個々の点 (=数) は無個性であり，それらが隙間なくぎっしり詰まって，遠くの方は霧のかなたに消えている．

この実数こそが，自然科学としての解析学が拠って立つ場である．ロビンソンの超準解析は，第一義的には標準数学を研究する手段であり，超準実数はそのための仮構である，と言ってもそれほど真実から遠くないのではないだろうか．

3° ネルソンの IST では実数体 $\boldsymbol{R}$ と別の超実数体はない．$\boldsymbol{R}$ のなかにすでに無限小や無限大が含まれている．この $\boldsymbol{R}$ (ないし $\boldsymbol{R}^3$) こそ，実在の表象としてもっとも適当かつ有効なものである，とネルソンは確信しているように思われる．これには根拠らしいものが二つある．

ひとつは IST が外集合 (たとえば無限小実数の全体) を許容しないことである．これには多分技術的困難もあったろう．実際，外集合つきの IST が ZFC の保存拡大であることの証明はかなり難かしくなる．このことは Hrbacek[8] や河合 [9] を見ればわかる．Nelson[6] はモデルを使って外集合を処理することを提案している．

それは確かに不便であり，とくにローブ測度のように，もろに外集合を扱うときは非常に不便である．しかし，IST から外集合を除外したために，かえって IST こそが数学の，したがって物理科学の最適な枠組である，という思想が鮮明に見えるように思われる．

ネルソンにちょっとおくれて，Hrbacek[8] は外集合も許容する超準集合論を作った．これは集合論的考察に重点が置かれすぎていて難解である．

そのあと，河合 [9] がやはり外集合を許容する超準集合論 NST を作った．これは非常にうまくできていて，研究者には一番使いやすい．そのかわり NST には標準世界，内的世界，全世界と，三つの世界があり，どれが《ほんもの》なのか分らない．数学研究のためにはそんなことはどうでもよいのだが，いま書いているような事柄にとってはおろそかにできない．

さて,《根拠》のもうひとつはネルソンの著書『Radically Elementary Probability Theory[7]』である．ネルソンはそこで，組合せ論的，離散的な確率論のなかで，無限大や無限小を適当に使うことによって，現在の測度論的確率論の基礎的な理論がすべて簡潔に展開されることを示した．

面倒くさい測度論が介入しないからそれは非常にすっきりしている．IST こそ数学の枠として最良の集合論だとネルソンは考えているな，と私は感じる．

4°　誤解されないように付け加えておくが，私はロビンソン流よりネルソン流の方がすぐれていると主張するのではない．実際，私は仕事をするときにはロビンソン流で考える．しかし，ある種の人たちに超準数学を説明するときは，自然数や実数が何種類もあるのは具合が悪いので，ネルソン流の方がよい．そして，我々が漠然とイメージしている自然数や実数にも，一歩一歩階段をあがっていくやりかたでは，原理的にも決して到達できないものがあるのだ，と力説する．

こう書いてきたものを読みかえしてみると，私には数学の枠組としての集合論への信仰があるのかもしれない．そもそもこんなあいまいな言説は全体として無意味かもしれないな．

参考文献

[1] Skolem,Th.; Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. Fund. Math. 23(1934)150-161.

[2] Schmieden, C. & Laugwitz, D. ;Eine Erweiterung der Infinitestmalrechnung. Math. Zeits.69(1958)1-39.

[3] Robinson, A. : Non-standard Analysis. North-Holland (1966) 第 2 版 (1974).

[4] Robinson, A. ; Selected Papers vol. 2, Nonstandard Analysis and Philosophy (ed. Keisler et al). Yale U.P.(1979).
[5] Dauben, I.W. ; Abraham Robinson, the creation of nonstandard analysis, a personal and mathematical Odyssey. Princeton U.P.(1995).
[6] Nelson, E. ; Internal Set Theory. Bull. AMS 83(1977)1165-1198.
[7] Nelson, E. ; Radically Elementary Probability Theory. Ann.Math.Studies 117.Princeton U.P.(1987).
[8] Hrbaček, K. ; Axiomatic Foundations for Nonstandard Analysis. Fund.Math. 98(1978) 1-19.
[9] Kawai, T. ; Nonstandard Analysis by Axiomatic Method. South-east Asian Conference on Logic. Elsvier(1983)55-76.
[10] 斎藤正彦 ; 数のコスモロジー「1 実数とは何か」.『現代思想』1982 年 1 月号. 斎藤正彦『数とことばの世界へ』所収 (日本評論社 1983).

第12章

計算量理論の誕生とその展開

— ユークリッドからゲノムサイエンスをつなぐ糸 —

宮野　悟

Euclid は，その有名な Euclid の互除法という「アルゴリズム」により 2 つの整数の最大公約数を求めている．これから述べる計算量理論 (computational complexity theory) の着想は，Euclid の時代からあったのかもしれない．しかし，このアルゴリズムや計算量の着想は，その後，2000 年の間，闇の中にあり，その重要性が認識されるようになったのはコンピュータがこの世に登場してからである．その間，背理法 (reductio ad absurdum) などの手段により，数学的オブジェクトの存在を証明することが数学の主流となったことは疑うべくもない．

20 世紀になって,「計算可能とは何か」という定義を求めて，帰納的関数やラムダ計算といった研究が展開され,「計算」という概念に光が当てられるようになった．これは現在のようなコンピュータの誕生する以前のことである．こうしたなかで，計算量理論の萌芽のエネルギーとなったのは，のちに「Turing 機械」とよばれるようになった数学的機械を定義した A.M. Turing の論文 [13] であろう．Turing は，人間の行なう計算という行為を分析し，それを単純な基本動作を用いて表すことを考え，数学的な計算機を定義している（図 1)．この Turing 機械という計算モデルは，テープ，状態，記号，ヘッド等の概念を用いて定義される．テープは必要ならば両方向にいくらでも追加できるという意味で無限なもので，ます目に分割され，各ます目には 1 つの記号を書きとめておける．ヘッドは，一回の動作において，その記号を読んだり，書き直したり，またヘッドをとなりのます目へ動かすことができる．こうした動作は,「プログラム」に相当する有限制御部によって，現在の状態と読みとった記号に基づいて決定される．Turing の分析では，このテープが計算用紙に対応し，ヘッドが人間の目と手の働きをし，状態は頭の状態に対応している．

この Turing 機械の概念により，計算時間や領域の概念を初めてとらえることが可能となったが，その後の 20 年間ほどは，どの問題が原理的に計算可能であるか否かということを説明する理論が集中的に展開された．

アルゴリズムによって「問題」を解くとき，2 つの計算リソース，すなわち，時

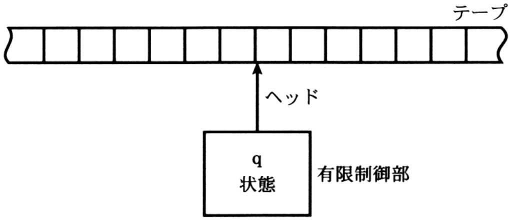


図 1　: Turing 機械

間とメモリが重要となる．メモリの量は，計算量理論では，領域量とよばれている．「問題」は，一般に，入力と出力の組の集合としてとらえられている．たとえば，巡回セールスマン問題という「問題」は，都市の集合 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ と 2 つの都市の間の交通費 $c(s_i, s_j)$ が与えられたとき，都市 s_1 からスタートしてすべての都市をちょうど一回訪問して出発点 s_1 にもどって来る交通費が最小となるツアーを求める問題である（図 2）．入力はこの都市の集合とその都市間のコストで，出力は最小コストのツアーとなる．そして，巡回セールスマン問題とは，こうしたあらゆる入力とその出力の組とから構成される．したがって，「問題」とはこう

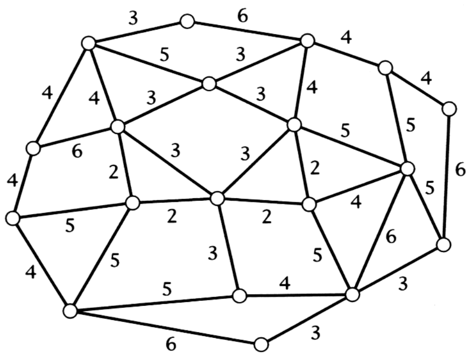


図 2　: 巡回セールスマン問題

した入出力データの組からなる無限集合である．一般に入力をビット列などで表現したときのその大きさを入力サイズという．巡回セールスマン問題の場合，入力のサイズ n は小さいものから大きいものまで無限に変わりる．そしてアルゴリズムにこの問題を解かせるとき，入力サイズ n に対してどれほどのステップ数（時間）やメモリ（領域）が必要となるかを n の関数としてとらえ，それがどうしても 2^n 以上必要となるといった議論によって，その問題のもつ本質的な「複雑さ」をとらえることが，計算量理論のアイディアである．

表 1 は，1 秒間に 100 万個の命令を実行できるコンピュータで，入力の長さ n が 10, 20, 30, 40, 50, 60 と増加したときに，問題のもつ時間計算量を表す関数が n^2, n^5, 3^n の 3 つの場合について，現実的にどのような意味があるのかを示したものである．n^5 の場合，入力の長さが 10 のときは一瞬，60 へ増加してもその時間は高々13 分である．一方，3^n の場合，入力の長さが 10 や 20 のときは現実的だが，$n = 50$ となると，200 億年かかってしまう．地球の寿命が 200 億年といわれているので，これは地球規模の時間では無理となる．また，$n = 60$ に入力長が増加すると，これは銀河系宇宙の時間を考えても無理である．数学的には「有限の時間」で可能であるが，地球や銀河系の寿命と比較するとその非現実性が理解できる．

表 1　：1 秒間に 100 万命令を実行できるとき．

時間関数	入力の長さ n 10	20	30	40	50	60
n^2	0.0001 秒	0.0004 秒	0.0009 秒	0.0016 秒	0.0025 秒	0.0036 秒
n^5	0.1 秒	3.2 秒	24.3 秒	1.7 分	5.2 分	13.0 分
3^n	0.059 秒	58 分	6.5 年	3855 世紀	2×10^8 世紀	1.3×10^{13} 世紀

こうした具体的な定式化は 1960 年代になされ，これまで「その問題は難しい」といった曖昧な表現で問題の難しさをとらえていたものを，数学的にとらえる枠組みができ，現在，計算量理論とよばれている分野が誕生した．

計算におけるメモリの必要性について，次の問題 $EVEN$ を考えよう．$\{0,1\}^*$ は，記号 0 と 1 からなる記号列全体の集合である．

$$EVEN = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ に現れる記号 } 0 \text{ の個数は偶数}\}$$

いま,「あなたに，これから 0 と 1 からなる任意の記号列 x を 1 文字ずつ示しますので，$x \in EVEN$ かどうかを判定して下さい」と言われたとしよう．記号列，00110101 や 111010100110101 などは $EVEN$ に属しているが，0110101 や 010010110 などは $EVEN$ に属していない．$EVEN$ は無限集合であるが，図 3 を使って,「偶」の「状態」からスタートして，0 の記号が 1 つくる毎に「奇」「偶」

と状態を変えていき，最後の記号をもらって状態を決めた時に「偶」の状態にあれば yes,「奇」の状態にあれば no とういうように判定すれば，いくらでも長い記号列に対して $EVEN$ に属しているかどうかを記号を読む時間内に，紙も鉛筆もなしで判定できる．したがって $EVEN$ を認識することは，$O(n)$ 時間で可能であり，しかも，外部メモリを必要としない．このように，外部メモリを必要とせず，有限の状態だけで判定が可能な問題は正則集合 (regular set) とよばれ，こうした計算のモデルは有限オートマトンとしてこれまで，理論と実際の両面から多くの研究がされてきた．M.O. Rabin と D. Scott は有限オートマトンについて業績 [10] により 1976 年 ACM Turing 賞を授賞している．この Turing 賞は,「コンピュータサイエンスに技術的な面で貢献したことにより選ばれた個人」に与えられる賞で，A.M. Turing を記念して 1966 年に設けられたものである．コンピュータサイエンスの世界の最高の賞として理解されている．

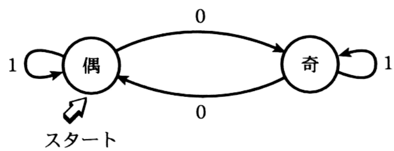


図 3　: $EVEN$ を受理する有限オートマトン

一方，次の問題 $EQAUL$ についてはどうであろうか．

$$EVEN = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ に現れる記号 0 と 1 の個数は等しい } \}$$

単純に 0 と 1 の個数を数えて比較することにより，記号列 00001111 や 111101001000 は $EQUAL$ に属し，10010 や 1001100 は $EQUAL$ に属さないことを確かめることができる．この判定を紙も鉛筆も使わずにできるだろうか．人間の体は有限個の原子からできているので，一人の人間が記憶できる最大の数 N が存在する．いま $3 \times N$ の長さの任意の記号列に対して，紙と鉛筆なしで，この判定を正しく行なうことができるだろうか．結論からいうと，この判定を正しく行なうには有限のメモリではできないことが証明できる．このようにどうしても入力の長さに依存するような量のメモリを用意しなければ正しく判定できない問題がある．このほかにも,「素因数分解はとても多くの時間を必要としそうだ」,「グラフのハミルト

ン経路を見つけることは難しい」，「2 人ゲームの多くは先手勝ちかどうかを決めることが困難だ」といった，自然な観察がある．計算量理論は，こうした観察を理論化することによって発展してきた．

計算量理論は，その萌芽的研究である山田尚勇の研究 [14] やほとんど同じ時期にプリンストン大学の学生であった M.O. Rabin, R.W. Richie, J.H. Bennett 等の関数の計算についての研究を経て，J. Hartmanis と R.E. Stearns [5] の仕事として幕を開けた．彼らは，multitape Turing 機械を使って時間計算量の概念を導入し，時間計算量についての階層定理を証明している．この貢献によって，J. Hartmanis と R.E. Stearns は 1993 年度 Turing 賞を授賞している．Hartmanis は，この論文についてのエピソードを [4] に載せている．当時，彼は，G.E. Research Laboratory にいたが，その当時のログブックを [4] から紹介しよう（図 4）．短期間に計算量の概念が結晶化していった様子がうかがえる．

```
November 12, 1962:  ''Some work on ''Comp. Com-
                      plexity.''
November 14:        ''Worked on T-comp. fu. with
                      RES.  Same nice insights.''
November 28:        ''Work on Comp. Complex.
                      This should be a good paper.''
December 5:         ''Work on C. Complexity.
                      More insights.''
December 6:         ''More results on CC.''
December 10:        ''Comp. Complexity starts
                      to crystalize.  Should be
                      good paper.''
December 12:        ''Writing of CC.''
December 31:        ''This was a good year.''
```

図 4　: J. Hartmanis の 1962 年のログブックより．

計算量理論の展開の初期では，計算量を計るメジャーは何であるべきかという議論が多くなされた．そして，最近では，時間や領域のほかに，ハードウエア量や並列時間なども計算の複雑さをとらえるメジャーとして重要であるという理解が深まることになった．

計算量理論は，1971 年の S.A. Cook の論文 [2] による NP 完全性の概念の導入と，論理式の充足可能性問題 (3-SATISFIABILITY PROBLEM) と部分グラフ問題の NP 完全性の証明によって大きな発展をする．NP は，非決定性 Turing 機械によって多項式時間で認識可能な集合のクラスである．この仕事とは独立であるが，その後，当時のソビエト連邦の L. Levin [8] も同様の概念に到達している．S.A. Cook は，この業績により 1982 年度 Turing 賞を授賞している．その授賞理由では「NP

完全な問題のクラスについて，その境界や性質を明らかにしようとするその後の探求は，過去 10 年間，コンピュータサイエンスにおける最も活発で重要な研究活動のひとつであった」と讃えている．

S.A. Cook の仕事を現実社会との関連で理解させ，大きく展開させたのが R.M. Karp [7] である．P は多項式時間で認識可能な集合のクラスであるが，これは，現実的に計算機によって解くことが可能と考えられる問題のクラスである．S.A. Cook が多項式時間 Turing 還元を用いたのに対し，彼は，もっと単純な多項式時間 many-one 還元を使って，古典的な組合わせ問題を含む 21 個の問題が NP 完全になることを示している．したがって，P≠NP ならば，巡回セールスマン問題を含むこれらの問題が手に（計算機に）負えない問題であることが判明した．この結果により，集合被覆問題，スケジューリング問題，ビンパッキング問題など実際の問題に対する方法論は一変し，このような NP 完全な問題に対しては，近似的な解を求めるアルゴリズムや確率的アルゴリズムの手法が重視されることになった．このNP やP という名前は，この論文で用いられたものであり，1985 年には R.M. Karp にの Turing 賞が授与された．現在，NP 完全性の理論は，周知のものとなりコンピュータサイエンスの教科書の主題にもなっている．M.R. Garey と D.S. Johnson [3] の教科書は，NP 完全な問題を整理し，その付録に 300 以上の NP 完全な問題のエントリをつけている．

この NP 完全な問題の例を 1 つ取り上げて，その問題がもつ特徴の 1 つを説明しよう．ハミルトン経路問題とは，無向グラフ G が与えられたとき，そのすべての

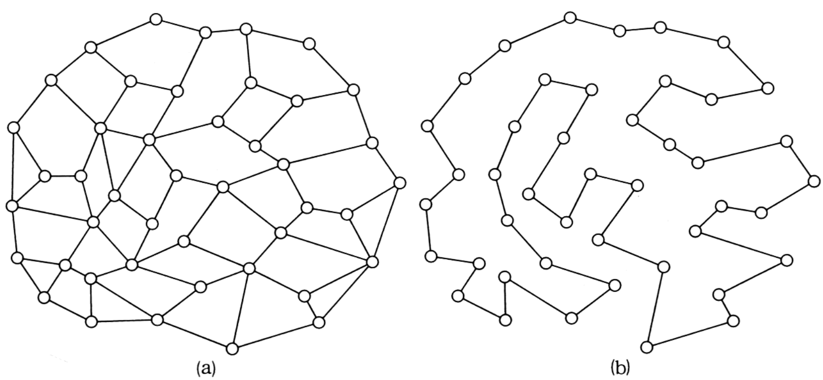


図 5　：ハミルトン経路問題とその解

ノードをちょうど 1 度だけ通る経路（パス）があるかどうかを判定する問題である．図 5(a) のグラフがハミルトン経路をもっているかどうかを短時間にチェックすることはあまり容易ではない．しかし，図 5(b) がそのハミルトン経路だといわれると，容易に「そうだ」とうなずける．NP の問題の 1 つの特徴は，このように解を探すことは困難だが（多項式時間ではできそうになく，どうしても指数的な時間を必要とすると思われる）解であることを確かめることは容易（多項式時間で可能）であることである．NP 完全な問題は，こうした問題のクラスを代表する問題として定義されている．

計算量理論における本当の挑戦とは，特定の問題の計算量の下界を証明することであるといっても過言ではない．P≠NP と強く信じられているが，その証明は与えられていない．つまり，NP に属する問題をとりあげて，例えば，今述べたハミルトン経路の問題が P に属していない，すなわち多項式時間で解くアルゴリズムが存在しないことを誰も証明できていないのである．これは，コンピュータサイエンスにおける最も重要な理論的問題である．

P や NP と並んで重要なクラスに PSPACE というクラスがある．これは，多項式領域で解くことができる問題のクラスである．このクラスを代表する問題も知られている．Generalized Hex とよばれる PSPACE 完全な問題は，2 人ゲームの問題で，図 6 のように，グラフと 2 つのノード s と t が与えられたとき，先手勝ちかどうかを判定する問題である（hex というゲームについては [18] を参照）．ゲームのルールは簡単である．ゲームはショートとカットという 2 手に分かれる．ショートはノード s から t へ渡り道ができるように黒石を置くことができたとき勝ちとなる．一方，カットは白石を置くこによってショートの邪魔をできたとき勝ちとなる．ショートから始めて交互に各々の石を置いていくとこによりゲームは進んでいき，有限回で終了する．この問題も多項式時間で解けそうにないと強く信じられている問題の 1 つである．しかし，この Generalized Hex は，先ほどのハミルトン経路問題と大きく異なった性質をもっている．この問題の解は，「先手勝ち」もしくは「後手勝ち」のどちらかである．ハミルトン経路問題では，解が正しいことを「容易に」確かめることができたが，この Generalized Hex の問題では，例えば「先手勝ち」であることどのようにして確かめることができるだろうか．一般に，有限 2 人ゲームに対して先手勝ちかどうかを確かめるには，ゲームの木を描いてみて確かめればよい．しかし，これは現実的に不可能である．ノード数が数十個のグラフの場合，ゲームの木のノードの個数はあっというまに銀河系を埋め尽くすために必要な陽子の数を越えてしまうため，そのノードをすべてたどることすら不可能である．このように，PSPACE 完全な問題は，解を見つけることの困難さに加えて，解が正しいことを多項式時間で確かめることができそうにないという特徴をもっている．しかし，確率アルゴリズムでは，状況が変わり，

多項式時間で高い確率でこのチェックができるということも知られている [11].

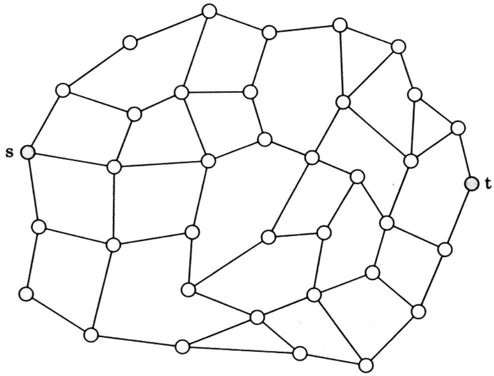


図 6 : GENERALIZED HEX 問題.

P⊆NP⊆PSPACE という包含関係があるが，まだこの包含関係が真になっているという証明にはだれも成功していない．一方で，計算量のとても大きな問題については，下界が証明されているものがある．A.R. Meyer[9] は，weak monadic second-order theory of successor という形式体系（定義をきちんと述べることはここではしない）の論理式の判定問題 (WSIS) は，決定可能（時間を無視すれば Turing 機械によって yes/no の判定ができる）であるが，指数の深さが定数で押えられているような指数関数，例えば 2^n, 2^{2^n}, $2^{2^{2^n}}$ などでは，WSIS を判定する Turing 機械の時間計算量を押えることができないことを証明している．A.R. Meyer をスーパバイザとして学位論文を書いた L.J. Stockmeyer [12] は，

「長さが 675 記号からなる WSIS のすべての論理式の真偽を判定する論理回路は 10^{126} 個以上のゲートをもたねばならない」

という計算をしている．10^{126} という数は，直径が 1000 億光年の宇宙に詰め込むことができる陽子の個数であり，WSIS のこうした計算は，現実には不可能といえる．

計算量理論の展開は広大で，その情報化文明へのインパクトは強烈である．その詳細にここで触れるスペースはもうほとんどない．問題は細分化し，複雑になっている．計算量のクラスについて D.S. Johnson [6] は，100 ページ近くにわたり，クラスの正確な定義とそれらの間の関係を解説している．また，入門的教科書としては，拙著 [15] などがある．

最後に，最近，ゲノムサイエンスの分野で，L.M. Adleman [1] の行なった DNA コンピューティングという方法でハミルトン経路を見つけさせる計算方法について触れたい．7 つのノードからなるハミルトン経路の問題を DNA 配列にエンコードし，通常のゲノム解析実験室で用いられている PCR 法等を用いて，ハミルトン経路を DNA 配列として取り出すというもので，基本はランダムなアルゴリズムである．日本では，1995 年 6 月に，東京大学医科学研究所ヒトゲノム解析センターで初めて追試が行なわれ [16,17]，6 ノードの問題に対して，Adleman とは少し違った方法で，実際に解を見つけることができたことが確認されている．この方法は，解の候補を大量に生成し，その中から解になっているものを抽出するというものである．ノードの個数が 200 を越えるようなグラフに対して，長さが 200 のすべてのパスを生成することを考えよう．グラフの辺を DNA 配列で符合化するために必要な DNA 配列の長さは $\log_4 200$ は必要であり，核酸 1 つの重さは少なくとも $10^{-25}kg$ ある．すると長さが 200 のすべてのパスを生成するために必要な DNA 配列の重さ (molecular weight) は

$$2^{200} \times \log_4 200 \times 10^{-25}kg \geq 3 \times 10^{25}kg$$

となる．これは地球の重量よりも大きくなっている．この DNA コンピューティングでは molecular weight という新たな計算のメジャーが重要となっている．このように，計算量理論は，分子生物学という新たな分野にもその展開を図ろうとしている．

関連書籍

[1] Adleman, L.M., Molecular computation of solutions of combinatorial problems, *Science* **266** (Nov. 1994) 1021–1024.

[2] Cook, S.A., The complexity of theorem proving procedures, *Proc. Third ACM Symposium on Theory of Computing*, 1971, 151–158.

[3] Garey, M.R. and Johnson, D.S., "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," W.H. Freeman and Company, 1979.

[4] Hartmanis, J., Observations about the development of theoretical computer science, *Annals of the History of Computing* **3** (1981) 42–51.

[5] Hartmanis, J. and Stearns, R.E., On the computational complexity of algorithms, *Trans. AMS* **117** (1965) 285–306.

[6] Johnson, D.S., A catalog of complexity classes, in "*Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. A*," J. van Leeuwen Ed., Elsevier Scinece Publishers B.V., 1990, 67–161.

[7] Karp, R.M., Reducibility among combinatorial problems, In "*Complexity of Computer Computations*," R.E. Miller and J.W. Thatcher, Eds., Plenum Press, N.Y., 1972, 85–104.

[8] Levin, L., Universal search problems, *Problemy Peredaci Informacii* **9** (1973) 115–116. Translated in *Problems of Information Transmission* **9**, 265–266.

[9] Meyer, A.R., Weak monadic second-order theory of successor is not elementary recursive, Lecture Notes in Mathematics **453** (1975) 132–154.

[10] Rabin, M.O. and Scott, D., Finite automata and their decision problems, *IBM J. Research and Development* **3** (1959) 115–125.

[11] Shamir, A., IP=PSPACE, *J. Assoc. Comput. Mach.* **39** (1992) 869–877.

[12] Stockmeyer, L.J., The complexity theory of decision problems in automata theory and logic, Doctoral Thesis, MIT, 1994.

[13] Turing, A.M., On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem, *Proc. Lond. Math. Soc. ser. 2*, **42** (1936) 230–265. A correction, *ibid.* **43** (1937) 544–546.

[14] Yamada, H., Real-time computation and recursive functions not real-time computable, Rochester, N.Y., General Dynamic Corp. (IRE Trans. Elec. Comp. EC11 (1962) 753–760).

[15] 有川節夫，宮野悟，オートマトンと計算可能性，培風館, 1986.

[16] 有田正規他，“DNA コンピューティング”, 第 5 回ゲノム情報チュートリアル資料，東京大学医科学研究所ヒトゲノム解析センター，1995.

[17] “「DNA コンピュータ」とは何か”，Quark No. 163, January, 1996, 116–121.

[18] 山崎洋平，組合せゲームの裏表，シュプリンガー・フェアラーク東京 (株), 1989.

第13章

戦後50年の数学は何をもたらし，未来に何を期待されるか

山口昌哉

まずはじめに言いたいことは，戦後50年の数学の研究について報告するためには，結局1900年以降の数学について説明しなければ戦後の50年のみでは，わからないことが多くて説明がうまくゆかないことである．もう少し説明すれば，私の意見では，20世紀，しかもその後半で，数学の歴史は大きな転回をなしつつあると思われるからである．この変化は，もしかすると，世界史としてもニュートン以来の変化かもしれない．

それでは20世紀初頭，どういうことが考えられてきたかを話したい．

1.　ディヴィド・ヒルベルト

この名前は，よく知られているが，この先生こそ今まで20世紀を代表する数学者として認められてきた大数学者である．この先生が，1900年8月パリで開かれたI.C.M.世界数学者会議で，20世紀に数学者は何をなすべきかについて有名な講演をされたことは，きわめて有名で，この講演は，その時期の世界の数学者に多大の感銘を与え，それ以来20世紀前半の世界の数学者の研究に大きな影響を与えることとなった．

そこで，最初にこのヒルベルトの講演内容について少し詳しく話したい．幸いにも，ヒルベルトは，この講演の要旨を1900年9月発刊の雑誌『アンセイニュマンマテマティク』に載せている．この雑誌は，国際的な数学教育の雑誌で，有名な物理学者ポール・アペル(フランス)，数学者では，ミッタク・レフラー(スウェーデン)，アンリ・ポアンカレ(フランス)，フェリックス・クライン(ドイツ)，エミール・ピカール(フランス)などが編集者に名を連ねている雑誌である．このヒルベルトの論文の別刷を，ヒルベルトが弟子のリチャード・クーラントに与えたものを，この6月に，さらにそのクーラントの弟子であるピーター・ラックス教授から私の誕生日のお祝いにいただき喜んでいる．これについて説明しよう．

一つの科学が連続的に進歩しているときは，今後の発展を現在我々が抱えている問題を調べることによって未来を判断できる．

(1)　我々の科学を発展させるために，すぐに解決に努力しなければならない諸問題はどんな特徴があるか？

まず，よく定義された問題であってその意味とカバーする範囲がはっきりした問題である．

(2)　どこから数学の問題は我々の前に現れるか？

まず，我々の経験から，諸科学での基礎的問題 (例えば，立方体の倍の体積をもつ立方体を求めよ)

さらにこれからは，問題を生み出す我々の 精神 である．論理的思考から問題を生み出す．

(3)　数学の問題の解決とはどういうことか？

その問題自身が含んでいるいくつかの (hypotheses) から，有限回の 3 段論法の使用のみにより，その正しさを証明することである．

証明は簡単なものほどよい．例えば，代数曲線論におけるアベル積分の導入や，関数論における巾級数の使用のように簡単かつ明瞭なものがよい (上に述べた，数学の問題の提供する hypotheses 仮定というものを，“公理” とよぶことにすれば，ヒルベルトが当時提唱した公理主義という立場になる)．

ヒルベルトはこのレデュメでも，このような公理主義的方法は整数論や解析のみでなく，幾何も物理学 (あるいは物理科学も) も同じように適用できると述べている．

(4)　どのような方法によって，我々は問題を解くべきか？

一般化(例えば，代数学におけるイデアールの概念では数や多項式を一般化している)．

および

特殊化 である．つまりいくつもの類似の問題を考え，そのうち比較的簡単なものを既知の問題に reduce して解いてゆく．

さらに，これらの方法の組み合わせが考えられる．

(5)　ある問題が解決不能のときはどうするのか？

不可能であることを厳密に 3 段論法で証明するべきである．
その例は，
平行線は交わらない．
5 次の代数方程式は普通の方法で解けない．
ここで，ディヴィド・ヒルベルトは，彼の 確信 を披瀝する．

確信 (Conviction)：数学においては，問題が解けるか，解くことが不可能が証明されるかのいずれかである．
“数学者は絶対に不可知論 Ignorabimus を許してはならない．”

20 世紀，特に前半の数学者は，世界中，この影響をうけた．

ヒルベルトはこのあと，23 の未解決問題を挙げている．

このようなヒルベルトの予言と提案のもとに 20 世紀の幕が切って落とされた．特に後で問題になるので，ヒルベルトの講演の確信の部分をヒルベルトのプログラムと言おう．つまり，これがヒルベルトの公理主義といわれる部分で，「すべての数学は，いくつかの公理から 3 段論法で証明される命題群であり，一つの命題はこの公理系によって証明されるか，またはその否定が証明されるかの 2 つであって，いかなることがあっても，そのどちらも示せないということはあり得ない．」という確信も含んで，ヒルベルトのプログラムまたはヒルベルトの公理主義という．

2.　アンリ・ポアンカレ

ヒルベルトの 1900 年の講演に関連して，ポアンカレがまったく別の「数学の将来」という講演を予定していた．彼は 1908 年のローマでの世界数学者会議で発表しようと準備していた．しかしポアンカレ本人は病気のため，彼の原稿をガストン・ダルブーが代読した．おそらく，I.C.M. の記録にあると思われる．ここでは，同じ 1908 年に出版された「科学と方法」に『数学の将来』という一章があるので，内容は同一でないかと思われるので紹介すると，数学者が解くべき問題はすべて解かれてしまったという悲観論者はもういなくなったので，ポアンカレは数学はまだまだ発展するという立場にある．ただ，どの方面に発展するかが問題だという．ときには，物理学者やそれ以外の専門の学者から問題を解くことを要請されることもある．しかし数学者は他の専門の学者の注文を待っているだけでよいだろうか？

これは，数学のみではない．物理学者も実益のみで研究を始めていない．もし，注文が来るまでただ待っていたならば，注文が来たときにも全く役に立たないであろう．

どの方向に発達するかという問に対する答は，

(1)　法則発見の手引きになることがら，いくつかの事実が孤立しないで他の事実と関連しそうに見える場合．

(2)　思考の節約になる方向，大きな産出力．

(3)　美しい関係，優美な証明．

例を挙げれば，代数学における公式であって，この (1), (2), (3) を目指すことによって，類似と相異とが一目にしてわかるからである．

次に，厳密性についてはこう言っている．

「18 世紀の中頃から，数学者は絶対的厳密に達しようと，次第次第に心を用いるようになった．この事はきわめてもっともな事であったが，しかし厳密のみが数学の全部ではない．しかし厳密がなければ数学には何の価値もない．厳密でない証明は無に等しい．この事は誰もが否定しないだろう．しかしながら，これをあまりに文字通りにとると 1820 年以前には数学はなかったと結論するしかない．これは明らかに極端すぎる話である．1820 年以前の数学者は，現在の我々が長たらしい議論によって説明することを，暗々に仮定してはばからなかった．それは何も彼らがそれに気づかなかったのではなく，彼らがあまり急いだために深く触れずに通過してしまったのである．その点を詳しく明らかにしようとすると，大変な労力が必要なのである．一つのことを示すための長い長い証明が果たしてよいのであろうか．先に述べた美しさということと矛盾する．」

もう一つ大変興味深いのは，1890 年，ワイエルシュトラウスはいたるところ微分不可能な連続関数を作って数学界を驚かせた．この時機まで，ほとんどの数学者，物理学者は，関数が連続なら変数のほとんどの点で微分可能であろうと思っていた．1860 年の論文にはそのようなものがあった．この事に関するポアンカレの感想は，次のようである．

「論理はしばしば怪物を生み出す．この半世紀以来，一群の奇怪な関数が現れて，かかる関数は何かものの役に立つ素直な関数とはできる限り似ても似つかぬ関数たらんと努めるかの如き観を呈するのを人は見て来た．かかる関数はもはや連続性をもたない，あるいはまた多分に連続性をもっていて，しかも導関数をもたない，などというものである．その上，論理的見地から見れば，もっとも一般な関数とはこれらの変わった関数であって，求めずして出会うような普通の関数は，

もはや特別の場合に過ぎないかの如くに見える．かかる関数には，ただ片隅の小さな場所が残っているのみである．かつては新しい関数がつくられれば，それは何か実用上の目的を達するためであったが，今日ではただ先人の推理の謬りを探し出すためにことさらに作り出すのであって，これからはこのこと以外得るところは何も無いのである.」(『科学と方法』，1908 年，吉田洋一訳，岩波文庫)

このようにワイエルシュトラウスの仕事に全く否定的である．これほどまでいわなくてもと思うが，ワイエルシュトラウスはドイツ人であり，仏独は，普仏戦争以後，第一次世界大戦の間できわめて悪感情があったことによるのかもしれない．なぜなら，この同じ著書『科学と方法』の中で，ペアノのペアノ曲線 (連続で平面の一部を埋めつくす曲線) には，賛辞を惜しみなく与えているのを発見できるからである．一方ポアンカレは彼の三体問題の研究から，現在カオスとよばれる数学的概念：決定論でありながら偶然性を生み出すもの (力学系) の研究の始祖であると現在信じられているし，著者もこれは本当であると思っている．1983 年，著者と畑政義は，上に述べたワイエルシュトラウスの奇怪な関数は，実はポアンカレの意味でカオス的な力学系と美しい関係で結ばれていることを発見した．これだけは，さすがのポアンカレも 20 世紀のはじめ予想していなかったと考えられる．これは 20 世紀後半のことである．

3.　20 世紀の数学

20 世紀，特に前半から中頃にかけて，このヒルベルトの演説の影響はきわめて強いものであった．まず，彼の与えた問題 23 個のうち大部分が解けた．日本の数学者の寄与もいくつかある．

20 世紀の数学を A, B ,C と書こう．

A. ヒルベルトの示した問題および，そこには示されていないが古来の難問も解けた．

フェルマーの問題 (1638)	⟶	解決	1995 年	Weils
四色問題 (1851)	⟶	解決	1976 年	

等々が解けた．その他に数理物理の方程式 (加藤，藤田，鵜飼などがある)．しかし，勿論，リーマン予想は解決していないし，他にも未解決の問題はいくつもある．その解決に努力している数学者も多い．

B. ヒルベルトの示した問題ではないが，ヒルベルトのプログラム (彼の確信) がある．これに対しては，1937 年ゲーデルは，はっきりとそれが誤りであることを示した．それがゲーデルの不完全性定理である．ほとんどすべての公理系につい

て，ある命題をつくることができて，その証明も，その否定の証明もできないものをつくることができる．ここにヒルベルトのプログラムはこの定理とそれにつづく第二不完全性定理によって，不可能であることが証明されたのである．もちろん，公理主義という主義が否定されたが，公理的方法は残る．

C. 新しい数学

20 世紀後半の特徴として，非線形の問題があらためて取り上げられたことは，注目に値する．もちろん，数理物理学における非線形の偏微分方程式，ボルツマン方程式，ナビヤーストークスの方程式等々の研究は，19 世紀以来，活発につづいている．これらの研究にコンピューターがその威力を発揮しだしたのは，やはり第二次世界大戦以後であり，この 50 年の大きな特徴である．

このコンピューターは，最初は，数理物理学の方程式についての解を計算して，実際に役立てることに用いられた．これらの方程式は非線形であった．これらが，計算機の近似計算で，厳密解の推測を可能にすることから，数理物理学以外の各分野での非線形問題に，数値計算や理論が拡大した．例えば，KdV 方程式 (浅水波の方程式) にはソリトンという珍しい解があるが，この研究は 20 世紀後半急速に発展した．そして広大な数学の分野がひらけた．日本では佐藤幹夫氏らの研究から，原理的研究が深まり，今では可積分系ということで発展している．

他の科学との関係．ここに特筆すべきことは，コンピューターの利用によっていくつもの分野で方程式が立てられ，まがりなりにも計算が行えるようになると，物理だけでなく，化学，生物学，工学の各分野で，計算機が用いられ，また，そのことが新しい非線形問題を生み，その数学的研究を促した．例えば，非線形反応拡散方程式などの研究が大いに 70 年代発展した．この研究はまた，生物個体群の行動の研究にもなり，数理生物学という数学の分野も発展した．

70 年代はさらにカオス，フラクタルなどの新しい数学を生み出した．これもコンピューターの能力の生み出したものであるとともにポアンカレの考えが実現している．

第 14 章

ヒルベルトの問題から見た 20 世紀数学

杉浦光夫

1.　はじめに

19 世紀最後の年である 1900 年の国際数学者会議 (パリ) で，ヒルベルトは 20 世紀数学の課題として 23 個の問題を提出した．これらの問題 [6] は，20 世紀 (特に前半) の数学に大きな影響を与えた．

ヒルベルトの問題の研究は，この 100 年の間に，問題の解釈や研究方法，研究目標について，大きな変化を見せている．その変化を調べることによって，20 世紀数学の，19 世紀数学と異なる特徴を見出したいというのが，本稿の目標である．

紙数が制限されているので，第 5，第 9，第 23 の三つの問題に記述を限定する．第 23 問題は，時間がなくてシンポジウムでは 話さなかったが，本稿の目標にとって興味ある内容を含むので，挿入することにした．

2.　第 5 問題

ヒルベルトの提出した形での第 5 問題は，次の I の形のものであった．

I. 「リーの連続変換群の理論を，群の演算及び作用を定義する函数の微分可能性の仮定なしで，連続性のみを仮定して展開することができるか？」

これは，ヒルベルトの幾何学基礎論の研究から生れた問題で，実際ヒルベルトは，2 次元のユークリッド幾何学及び双曲幾何学 (ロバチェフスキ・ボリアイの非ユークリッド幾何学) を，運動群と平面についての，位相的な仮定のみを含む公理系によって展開できることを示していた ([7] を見よ).

リーの連続変換群 G とは，n 次元空間 ($\boldsymbol{R}^n$ または $\boldsymbol{C}^n$) の開集合 U (その座標を $x_i, \cdots, x_n$ とする) の，r 個の径数 (パラメタ) $a_1, \cdots, a_r$ によって定められる，変換

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n\,; a_1, \cdots, a_r), \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.1}$$

の集合で，変換の合成および逆変換をとることで閉じているもののことである．そして函数 f_i は，解析函数であるとリーは仮定して理論を展開したが，間もなく，f_i は十分なめらか (例えば C^3 級) であればよいことがわかった．

このリーの定義では，径数 a_i や変数 x_j の動く範囲については，明確に規定されていない．リーマンの就職講演において，n 次元多様体の概念は構想されたものの，多様体の正確な定義がなかった当時にあっては，これは当然のことであった．

しかし 20 世紀に近づくと，位相空間や多様体の正確な定義に向けて，種々の試みが行われるようになる．ポアンカレは「位置解析」の中で，$\boldsymbol{R}^n$ 内に入っている微分可能多様体の定義を与えた．また上述のヒルベルトの論文 (1902 年) は，そのような試みの中で，初期のものとして注目に値する．そこでは「平面」は，数平面 $\boldsymbol{R}^2$ の各点に，近傍が定義されたものとして定義されている．そして点 A の近傍とは，数平面のジョルダン閉曲線の内部の点と一対一に対応するものとされているのである．

ヒルベルトの学生だったワイルは，1913 年の『リーマン面の理念』[16] において，初めて 2 次元多様体の正確な内在的定義を与えた．

また 1906 年にフレシェは，極限概念を基礎にして位相空間を定義し，また距離空間をも導入した [1]．また 1914 年に，ハウスドルフは『集合論綱要』[5] において，近傍による位相空間の定義を導入し，これによって位相空間の概念が定着した．

このように多様体および位相空間の概念が作られると共に，局所的なリーの理論を，大域的にとらえ直した研究が出現した．それがワイルの有名な「半単純リー群の表現論」[17] という論文である (1925,26 年)．ここでは，リー群は大域的な多様体として把握され，その位相構造，特に基本群が詳しく考察されている．

このワイルの仕事に刺激され，シュライヤーは位相群の概念を導入し，被覆群の一般論を構成した．そして 1933 年には，ハールが局所コンパクト群上に，左 (右) 移動で不変な測度が存在することを証明し，局所コンパクト群の研究に，有力な固有の手段を提供した．

このような動きの中で，フォン・ノイマンは 1934 年の論文 [15] において，I に対する反例を与えた．それは実数の加法群 $\boldsymbol{R}$ が平面 $\boldsymbol{R}^2$ に，連続な変換群として作用するが，その作用が C^1 級 (連続微分可能) ではないものの例であった．つまり (2.1) 式が a_1 について連続であるが C^1 級でない例を与えたのである．この例によって，群演算と，群の空間への作用では，事情が異なることが了解されるようになった．一方フォン・ノイマンは，この論文において，「コンパクトな位相群 G の各点のある近傍が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相 (つまり G が n 次元位相多様体) ならば，G は解析的多様体であり，群演算も解析的である」ことを示した．その証明には，ハール測度によって，ペーター・ワイルのコンパクト・リー群の表現論が，任意のコンパクト群に対しても使えるようになったことが本質的に用いられている．

これ以後，第 5 問題は次の II の形のものとして研究されるようになった．

II. 「任意の位相リー群 (位相多様体である位相群) は，(解析的) リー群であるか?」

同じ頃ポントリャーギンは，彼の得た第二可算公理をみたす局所連結な局所コンパクト・アーベル群は，$\boldsymbol{T}^k \times \boldsymbol{R}^n (k \in \boldsymbol{N}$ または $k = \omega,\ n \in \boldsymbol{N})$ と同型であるという構造定理を得，それから，アーベル群の場合には，II が成立つことを示した [11]．この場合 G が位相多様体であるという条件は，局所連結かつ有限次元という条件で置き換えられる．この結果を用いて，シュヴァレーは，可解群についても II が成立つことを示した．

さらにポントリャーギン [12],[13] は，次のコンパクト群の構造定理を証明して，フォン・ノイマンの結果が成立つ内的根拠を与えた．

ポントリャーギンの構造定理　可算基を持つ任意のコンパクト群 G は，局所的には，局所リー群 L と完全不連結な正規部分群 K の直積となる．

従って G が局所連結かつ有限次元 (特に位相多様体) のとき，K は有限群になり，L が G における単位元の近傍となるから，G はリー群となる．

上の定理にも現われているように，局所コンパクト群の中の二つの重要なクラスとして，リー群と，完全不連結な群がある．後者は p 進体 $\boldsymbol{Q}_p$ のような，非アルキメデス付値に関する完備付値体や，そのような体の元を係数とする行列群などがその典型的な例である．完全不連結な局所コンパクト群の一つの特徴は，いくらでも小さな部分群を持つことである．例えば p 進体の加法群 $\boldsymbol{Q}_p$ では，p^n で割切れる元の全体 A_n は部分群であり，$\{A_n\}_{n \in \boldsymbol{Z}}$ は $\boldsymbol{Q}_p$ における 0 の近傍の基を作る．従って 0 のどんなに小さい近傍にも，$\{0\}$ と異なる部分群が含まれる．

一般に位相群 G の単位元 e のどんな近傍も $\{e\}$ と異なる部分群を含むとき，G は小さい部分群を持つという．

位相群 G の閉正規部分群 N による剰余群 G/N は，G の準同型像であり，G を近似していると言える．そして N が小さい程，G/N は G に近い．上のポントリャーギンの構造定理では，G/K はリー群で K はいくらでも小さくとれるから，コンパクト群 G はリー群でいくらでもよく近似できることになる．この点に着目して，岩澤健吉 [8] とグリースン [9] は，リー群で近似できる局所コンパクト群を研究し，次の予想 III, IV に到達した．

III. 任意の局所コンパクト群 G は，リー群で近似できる開部分群 G_1 を含む．G が連結なら，$G = G_1$ となる．

IV. 局所コンパクト群 G が小さい正規部分群を持たなければ，G はリー群である．

岩澤は，III と IV が同値であることを示した．またリー群で近似できる群に対しては II が成立つことも証明した．従って III または IV が証明できれば II も証明できる．この段階で，グリースンは次の決定的な定理 V を証明した ([10], 1952 年)．

V. 有限次元の局所コンパクト群 G が，小さい部分群を持たなければ，G はリー群である．

グリースンは，これを証明するため，$\boldsymbol{R}^n$ における半径 r の球に対応する，e のコンパクト近傍の半群を構成し，それから G の自明でない 1 径数部分群の集合 Γ の存在を示し，e におけるその接ベクトルの集合として，実線型空間 Z を作った．G の有限次元性から Z も有限次元である．G の内部自己同型は，Γ の置換を引き起すので，G の Z 上での線型表現 Φ ができる．Φ の核に関する考察を用いて，$\dim G$ に関する帰納法で G がリー群であることが証明されるのである．

この V から II が証明できることは，同じ年にモンゴメリー・ジピン [9] が証明した．

その証明はあまりわかり易いものではなかったが，とにかくそれによって 30 年代から懸案になっていた II が肯定的に解決されたのであった．

翌 53 年に山辺英彦 [18][19] は，グリースンの方法を精密化して，V における有限次元という仮定は不要であること，IV における「小さい正規部分群がない」という仮定は「小さい部分群がない」という仮定と同値であることを示した．これによって，IV 従って III も証明され，それから II も導かれる．こうして第 5 問題は，II, III, IV のどの形でも解決された (その証明は [10] を見よ)．なお岩澤 [8] におけるリー群で近似できる連結局所コンパクト群の構造定理は，ポントリャーギンのそれに比し，K の完全不連結性が含まれていない点で，弱い形のものであったが，ポントリャーギンの形の定理もグルシュコフ [4] によって 57 年に証明された．

以上の第 5 問題の解決では，局所コンパクト群のクラス中に，リー群と完全不連結群の二つの大きなクラスがあり，後者を排除する条件として，小さな部分群を持たないという条件が登場したのであった．

一方 1964 年に，セール [14] は，任意の完備付値体上の解析的リー群の理論を作り，付値がアルキメデス的であってもなくても，同様にリー群とリー環の対応を主要な内容とするリー理論が成立つことを示した．第 5 問題では対立的に扱われた，アルキメデス的世界と非アルキメデス世界が，完備付値体という条件で統一的に扱うことができることが示されたことは興味深い．

第 5 問題は，幾何学の公理として連続性の仮定は自然であるが，微分可能性の仮定は技巧的であると感じたヒルベルトの疑問に発して，局所コンパクト群中でのリー群の特徴付けの問題として解決された．そして局所コンパクト群というような抽象的なクラスは，具体的な数学の世界 (例えば数論) においては，アルキメデス的な完備付値体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ の世界と非アルキメデス付値体の世界に具体的に二分されることが見えて来たのであった．

3.　第 9 問題

第 9 問題は,「代数体において, 高次冪剰余相互法則を証明せよ」という問題である. これはガウス以来代数的整数論の中心的問題と見なされて来た. ガウスは, 平方剰余の相互法則 (内容的にはオイラーが既に知っていた) に初めて七つの証明を与えると共に, 高次剰余相互法則の研究を開始した. これは彼が基本定理と呼んで重視した相互法則の本質を追求しようとしたためと思われる. ガウスは, 1832 年に, ガウスの整数 $m+ni\,(m, n \in \boldsymbol{Z})$ を導入し, そこで 4 次剰余相互法則を定式化した.『整数論研究』における円分方程式の研究とこの研究によって, ガウスは現代の代数的整数論への第一歩を踏み出したのであった. 3 次および 4 次の相互法則は, ヤコビとアイゼンシュタインによって証明が与えられた. 3 次, 4 次を超える素数 l に対する l 冪剰余相互法則は, クムマーによって円分整数の理論の中で研究されたが, この素数 l が正則 (1 の原始 l 乗根を有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に添加した体の類数を l が割らない) ときにのみ, クムマーは相互法則の証明に成功したのであった. そしてクムマー以後も非正則素数 l に対する l 冪剰余相互法則は長らく宿題となって居たのである [10]. ヒルベルトは, この状勢を打破するために第 9 問題を提出したのであった. そしてこの問題について, ヒルベルト自身具体的な研究プログラムを持っていた.

それは代数体 k に対し, k 上の最大不分岐アーベル拡大体 K(k のヒルベルト類体あるいは絶対類体) を構成し, K/k という拡大の予期される諸性質を述べたもので, この絶対類体の理論の中で, 高次冪剰余相互法則を証明しようとするものであった [5]. フルトヴェングラーは, このヒルベルトの研究方針に沿って, 着実に研究を進め, 1912 年には寄素数次相互法則の証明に成功したのであった [4].

一方高木貞治は, 分岐のある場合をも含む, 一般類体論を建設し, 代数体の任意のアーベル拡大体は, 類体であることを証明した ([8], 1920 年). そして高木はこの立場から, 相互法則の証明を与えた ([9], 1922 年).

こうして代数体のアーベル拡大についての一般論の進歩によって, 円分体論の中ではどうしても解決できなかった正則素数の壁を打破することができたのである. 所が類体論成立の直後に, 新しい動きが生じ, 相互法則の見方も大きく変化することになった.

それは 1927 年に, E. アルティン [2] が次の一般相互法則を証明し, それから任意の自然数 n に対する n 冪剰余相互法則が, 直ちに導かれることを示したことによる.

一般相互法則　代数体 k のアーベル拡大体 K に対し, K で不分岐な k の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, フロベニウス置換 $\sigma_p = \left(\dfrac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) \in G = \mathrm{Gal}(K/k)$ (剰余体の

$q = N\mathfrak{p}$ 乗自己同型を引起すガロア群 G の元) が一意的に定まり，$\mathfrak{p} \mapsto \left(\dfrac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ という対応によって，K に対応する k の合同イデアル類群とガロア群 $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ は同型となる．

この一般相互法則は，高木の類体論における同型定理とイデアルの分解法則を含むもので，類体論の中心的定理の位置を占めることになった．19 世紀の数論が求め続けて来た高次冪剰余相互法則が，この一般相互法則から直ちに導かれることは，類体論がガウス以来の数論の目標を達成したことを明示した．

法 β を与えたとき，元 α が m 冪剰余であるかどうかということと，法 α で元 β が m 冪剰余であるかどうかの関係を与えるのが m 冪剰余相互法則である．これは代数的整数間の直接的な関係を求める問題であったが，これがアーベル拡大における合同イデアル類群とガロア群の構造的関連を与える一般相互法則という高次の法則に帰着させられた所に，19 世紀と 20 世紀の数論の性格の変化が示されている．

アルティンの研究は 1920 年代に行われたのであったが，それは 20 世紀後半の数論にも重要な関連を持つことになった．

アルティンが一般相互法則を予想した論文 [1] で，彼は一般に代数体 k のガロア拡大体 K と，そのガロア群 $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ の n 次元表現 ρ に対して，アルティン L 函数 $L(s:\rho)$ を導入した．特に G がアーベル群で，ρ が 1 次元表現 (指標) のとき，一般相互法則によれば，

$$\text{アルティン } L \text{ 函数} = \text{ヘッケ } L \text{ 函数} \tag{3.1}$$

という等式が成立つ．右辺のヘッケの L 函数は，k 上の類体 K に対する k の合同イデアル類群の指標から作られる L 函数である．逆に (3.1) から一般相互法則を導くことも出来るので，(3.1) が一般相互法則の解析的表現といえる．

さてアーベル拡大でない一般のガロア拡大の場合，(3.1) の左辺は意味があるが，右辺は定義されていない．この場合の右辺を考えることは，何人かの数学者が試みているが，特に R. ラングランズは，保型形式とディリクレ級数の関係を研究したヘッケの晩年の仕事を参考にして，いくつかの予想から成る，大きな研究計画を提案した ([6],[3],[7] 等)．ラングランズによると，G が非可換の場合の (3.1) の右辺は，k のアデール環 $\boldsymbol{A}$ に対する群 $GL_n(\boldsymbol{A})$ のある種の尖点表現の L 函数となる．このラングランズの予想は，現在特別な場合にしか確かめられていないが，表現論，保型形式，数論などの交錯する大きな研究目標を提示して居り，かつての高次冪剰余相互法則の証明が代数的整数論の推進力となったように，今世紀後半から 21 世紀にかけての数論に活力を与えるものと思われる．

4.　第23問題

第 23 問題は,「変分法の方法をさらに発展させよ」という問題である.

変分法は，無限次元の函数空間上で定義された汎函数の，最大最小値または極大極小値と，それを実現する函数を求めることを基本的問題とする.

この場合汎函数は，未知函数とその導函数の積分で与えられる．いま簡単のために，一変数函数 ($\boldsymbol{R}$ のある区間 $I = [\,a, b\,]$ 上で定義された実数値函数) $u(x)$ を未知函数とする場合を考えると，考える汎函数は,

$$J[u] = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{4.1}$$

の形のものである．J の最大最小を論ずるためには，J の定義域である許容函数の集合 X を定める必要がある．しかし X は (4.1) から必然的に定まるものではなく，そのとり方自身も問題になる．通常許容函数 $u(x)$ は，(4.1) が意味を持つことを要求する外に，適当な境界条件をみたすことを仮定する．例えば固定端の場合には，A, B を与えられた二つの実数として,

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B \tag{4.2}$$

という形の境界条件をみたす函数 $u(x)$ のみを考える.

変分法は，微積分法が発見された直後の 17 世紀後半から研究が始まった．最初は，$u(x)$ が汎函数 $J[u]$ の最小値 (または最大値) を与える函数であると仮定したとき, u のみたすべき微分方程式を求め，この方程式を解いて u の形を定めることが変分法の主な内容であった．従ってそれは微積分法の応用の一部であった．この過程は始め個別の問題毎に遂行されていたが，18 世紀の中頃になると，オイラーとラグランジュによって，個々の問題の特殊性に依存しない一般的な形にまとめられた．それは大略次の通りである．$u_0(a) = u_0(b) = 0$ をみたす u_0 を一つとり，実パラメタ ε に対し，J の極値を与える函数 u を $u + \varepsilon u_0$ に変形するとき，実変数函数 $\varphi(\varepsilon) = J[\,u + \varepsilon u_0\,]$ は，$\varepsilon = 0$ で極値をとるから，$\varphi'(0) = 0$ でなければならない．この条件を書換えたものが，許容函数 $u(x)$ が，汎函数 J の極値を与えるための必要条件であり，u に対する 2 階微分方程式

$$\frac{d}{dx}F_{u'} - F_u = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad u''F_{u'u'} + u'F_{u'u} + F_{u'x} - F_u = 0 \tag{4.3}$$

の形に書くことができる．(4.3) を変分問題 (4.1), (4.2) に関するオイラー (・ラグランジュ) の微分方程式という．これを解くことによって，例えば最速降下線の問題では，サイクロイドが解として得られる．また (4.2) をみたす函数 $u = u(x) \geq 0\,(a \leq x \leq b)$ のグラフを x 軸のまわりに回転して得られる曲面の曲面積が最小になるのは，このグラフが懸垂線の一部であるときに限ることなども導かれた．多変

数函数の変分問題に対しても，同様にして，オイラーの方程式が導かれる．この場合オイラーの方程式は偏微分方程式になる．

これらの 18 世紀変分法の結果に対し，19 世紀の変分法は，オイラー方程式の解が，実際に汎函数 $J(u)$ の極値を与えるための条件を求めることが中心問題となった．

さて汎函数 J の極大極小とは，与えられた許容函数の空間 X 内の一点の近傍における最大・最小を意味する．従ってこの場合函数空間 X における近傍の定義が問題になる．この点の明確な認識は，19 世紀終りになって A. クネーザーによって得られた．いま境界条件 (4.2) をみたす区間 $I=[a,b]$ 上の C^1 級函数 (u' が存在して連続な函数) の全体を X としたとき，一様ノルム $\|u\| = \max_{x\in I}|u(x)|$ を考える．そして X において一点 u の近傍を

$$U(x,\varepsilon) = \left\{ v \in X \;\middle|\; \|u-v\| \le \varepsilon \right\}$$

で定義する．この $U(u,\varepsilon)$ を u の強近傍 (または C 近傍) という．そして強近傍における汎函数 J の最小値を，強極小値という．これに対して，

$$W(u,\varepsilon) = \left\{ v \in X \;\middle|\; \|u-v\| + \|u'-v'\| \le \varepsilon \right\}$$

の形の集合を，u の弱近傍 (または D^1 近傍) といい，そこにおける最小値を弱極小値という．

この言葉を使うと，ヤコビ [5] は，共役点という概念を用いて，u が J の弱極小値を与えるための十分条件を与え，ワイヤストラス [10] は E 函数の理論を導入して，u が強極小値を与えるための十分条件を与えたのであった．

極値のための必要条件も求められたが，十分条件とは微妙に異なって居り，事態の複雑さを示している．

ヒルベルトは，第 23 問題の説明の中で，ワイヤストラスの理論の中心部分を，ヒルベルトの不変積分によって，幾何学的に見通しよく説明している．

しかしヒルベルトは「数学の問題」と同じ 1900 年に，全く新しい変分法の研究法を具体的に提出した．それが今日変分法の直接法と呼ばれるものの最初の例であった．ヒルベルトは，リーマンが用いて有名になった境界値問題に対する，ディリクレの原理と呼ばれる解法の正当性を証明したのである．

平面領域 D 上でラプラスの方程式 $\Delta u = 0$ をみたし，かつ D の境界 ∂D 上で与えられた連続な境界値函数 g と一致するような函数 u を求める問題が，ラプラス方程式に対するディリクレ問題である．与えられた境界値 g を持つ函数 u の中でディリクレは，ディリクレ積分

$$D[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

の値を最小にするという変分問題に対するオイラーの方程式がラプラスの方程式であることから，ラプラス方程式のディリクレ問題に対する解を得るには，ディリクレ積分を最小にする函数をとればよいことに気付いた．ディリクレの講義でこれを知ったリーマンは，この方法をディリクレの原理と名づけ，複素函数論を基礎づけた彼の研究 [8] で利用した．ディリクレ積分が非負であることから，有限な積分値の下限 D_0 が存在するが，リーマンはこのとき $D[u_0] = D_0$ となる函数 u_0 が存在すると考えた．1870 年にワイヤストラスがこのような u_0 の存在は自明でなく，存在の証明が必要であることを指摘した．ワイヤストラスは，実際簡単な 1 次元変分問題で，積分値は下に有界であるにも拘らず，最小値を与える許容函数が存在しないような例を与えた．このワイヤストラスの批判によって，ディリクレの原理は信用を失い，数学者達はこれを用いないようなディリクレ問題の解法を専ら探究した．これに対し，ヒルベルト [3], [4] は，ディリクレの原理の正しさを信じ，その証明を与えることを考えたのであった．彼は境界条件をみたす函数列 (u_n) で，$\lim_{u\to\infty} D[u_n] = \inf D[u]$ となるものを適当に選ぶことにより，(u_n) の極限 u_0 が存在して，$D[u_0] = \inf D[u]$ であり，かつ u_0 は 2 回偏微分可能で $\varDelta u_0 = 0$ をみたすことを証明するのに成功したのであった．

19 世紀の変分法は，オイラー方程式の解が極値を与えるかどうかを専ら問題にし，許容函数全体の中で，実際に汎函数の最大値，最小値を与える函数が存在するかどうかには触れないことが多かった．これに対し 20 世紀の変分法は，ヒルベルトの考えを一般化し，一般の変分問題に対し，汎函数 J の最小値を与える函数の存在を示し，そのなめらかさを研究することを中心問題とする．この新しい研究法は，それ以前の変分法とはっきり異なって居り，変分法の直接法と呼ばれている．

直接法は，ルベーグ，トネリ [9]，モーレイ [6]，デ・ジョルジほか多くの人達等によって発展させられて行った．ルベーグ積分，函数空間，超函数などの解析学の進歩は，変分法にも大きく影響した．特に許容函数の空間として，トネリは絶対連続函数の空間を用いたが，現在では，ソボレフ空間を用いることが多い．ソボレフ空間は $\boldsymbol{R}^n$ の領域 D 上で定義され，$\boldsymbol{R}^m$ の値をとる函数 u で，その k 階までのすべての偏導函数が超函数の意味で存在し，かつそれが Ω 上 p 乗可積分であるようなものが，自然なノルムについて作るバナッハ空間である．

汎函数の最小値を与える函数の存在を示すには，「下半連続な実数値函数は，コンパクト集合上で最小値に達する」という良く知られた定理を用いる．この際バナッハ空間の強位相で，任意の有界閉集合がコンパクトとなるのは，有限次元の場合に限るので，弱位相を用いなければならない．また $J[u]$ の下半連続性は，スカラー値函数のときは，被積分函数 $F(x,u,p)$ の，p についての凸性から導かれる．ベクトル値函数の場合には，この凸という条件を準凸という条件に置き換える必要がある．

こうして $F(x,u,p)$ の滑らかさと p についての増大度を上下から押える適当な条件の下で，変分法の汎函数 $J[u]$ の最小値を与える函数の存在が証明される．従ってラプラス方程式のような，変分問題のオイラー方程式である偏微分方程式の境界値問題では解の存在が，変分法の直接法によって証明されるようになったのである．

なおこのような一般の場合には，解 u に普通不連続点があり，ある測度 0 の閉集合の外でヘルダー連続になることが証明されるだけである．このような解のなめらかさの問題 (特にベクトル値函数の場合) は，20 世紀後半の変分法の大きな問題であって，多くの研究が行われた ([1] を見よ)．

また特別な変分問題，例えば極小曲面，極小部分多様体については多くの興味ある研究が行われた．これについては，例えばニッツェの本 [7] を参照されたい．

なお変分法から出発して，新しい分野を開拓したものとして，モースの理論や最適制御の理論がある．

19 世紀までの変分法の歴史については [3]，現代の変分法の教科書としては [2] がある．

文献

第 5 問題

[1] M.Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22(1906), 1-74.

[2] A.Gleason, On the structure of locally compact groups, Duke Math.J. 18(1951), 85-104.

[3] A.Gleason, Groups without small subgroups, Ann.of Math. 56(1952), 193-212.

[4] V.M.Gllushkov, The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem, Russian Math. Surveys 12(1957), 3-41.

[5] F.Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit, Leipzig, 1914.

[6] D.Hilbert, Mathematische Probleme, Gött. Nachr.(1900), 253-299, Ges.Abh.III, 290-329.

[7] D.Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie, Math.Ann. 56(1902), 381-422.; "Grundlagen der Geometrie", Anhang IV. 寺阪英孝訳,『幾何学の基礎』共立出版, 1970.

[8] K.Iwasawa, Onsome types of topological groups, Ann.of Math. 50(1949), 507-557.

[9] D.Montgomery and L.Zippin, Small subgroups of finite dimensional groups, Ann. of Math. 56(1952), 213-241.

[10] D.Montgomery and L.Zippin, "Topological Transformation groups". Interscience, New York, 1955.

[11] L.S.Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, Ann.of Math. 35 (1934), 361-388.

[12] L.S.Pontrjagin, Sur les Groupes Topologiques Compactes et le Cinquième Problème de M.Hilbert, C.R.Paris 200(1935), 1277-1280.

[13] L.S.Pontrjagin, "Topological Groups", Princeton Univ. Press. Princeton, 1939.

[14] J.P.Serre, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, New York, 1965.

[15] J.von Neumann, Die Einführung der analytischer Paramerter in topologischen Gruppen, Ann.of Math. 34(1933), 170-190.

[16] H.Weyl, "Die Idee der Riemannschen Flächen", Teubner, Leipzig, 1913. 田村二郎訳『リーマン面』, 岩波書店, 1974.

[17] H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag, Math. Zeit. 23(1925), 271-309, 24(1926), 328-395, 789-791.

[18] H.Yamabe, On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann.of Math. 58(1953), 48-54.

[19] H.Yamabe, Generalization of a theorem of Gleason, Ann.of Math. 58(1953), 351-365

第 9 問題

[1] E.Artin, Über eine neue Art von L-Reihen, Abh.Math.Sem.Hamburg, 3(1924), 89-108; Collected Papers, 105-124. 片山孝次訳『新しい種類の L-関数について』, 津田塾大学数学. 計算機科学研究所報. 7(1994), 1-19.

[2] E.Artin, Beweis der allgemeine Reziprozitätsgesetzes, Abh.Math.Sem. Hamburg 5(1927), 353-363. Collected Papers 353-363. 片山孝次訳『一般相互法則の証明』, 津田塾大学数学. 計算機科学研究所報. 7(1994).

[3] A.Borel and W.W.Casselman ed., "Automorphic forms, Representations and L-Functions", Proc. Symp. Pure Math. 33, Part 1,2, AMS, 1979.

[4] Ph.Furtwängler, Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit primzahlexponenten in algebraischen Zahlkoerpern, Math.Ann. 67(1909), 1-31, II72(1912), 346-386, III74(1913), 413-429.

[5] D.Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper, Nachr.Akad. Wiss. Göttingen, 5(1889), 377-399. ; Ges.Abh.I, 483-509.

[6] R.P.Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, Lecture Note in Math. 170(1970), 18-86.

[7] R.P.Langlands, Automorphic Forms, Shimura Varieties, and Motives, Ein Märchen, in [3] part 2, 205-246.

[8] J.Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, im "Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990", DMV, Vieweg, Braunschweig, 1990, 587-628.

[9] T.Takagi, Ueber eine Theorie des relativ-Abel'schen Zahlkörpers, J.Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo 41(1920), 1-133. ; Coll. Papers, 73-167.

[10] T.Takagi, Ueber das Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J.Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo 44(1922), 1-50, ; Coll. Papers 179-216.

[11] 高瀬正仁,『ガウスの遺産と継承者たち, ドイツ数学史の構想』海鳴社, 1991.

第 23 問題

[1] M.Giaquinta, "Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems", Ann. Math. Studies 105, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.

[2] M.Giaquinta and S.Hildebrandt, "Calculus of Variations" 2 vols, Grundlehren Math. Wiss. 310, 311. Springer, Berlin, 1996.

[3] D.Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, Jahresber. DMV, 8(1900), 184-188.

[4] D.Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, Math. Ann. 59(1904), 161-186. ; Ges. Abh. III, 15-37.

[5] C.G.J.Jacobi, Zur Theorie der Variations - Rechnung und der Differential Gleichungen, J. reine u. angewandte Math. 17(1837), 68-82. ; Ges. Werke IV, 39-55.

[6] Ch.B.Morrey, Jr., "Multiple Integrals in the Calculus of Variations", Grundl. Math. Wiss. 130, Springer, 1966.

[7] J.C.Nitze, "Vorlesungen über Minimalflaechen", Grundl. Math. Wiss. 199, Springer, Berlin, 1975. ; Lectures on Minimal Surfaces", vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
[8] B.Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer verländlichen complexen Grösse, Dissertation, Göttingen, 1851. ; Ges. Math. Werke, 1-43.
[9] L.Tonneli, "Fondamenti di calcolo della variazioni", 2 vols., Zanichelli, Bologna, 1921-23.
[10] K.Weierstrass, "Vorlesungen über Variationsrechnung", Werke, VII, Berlin und Leipzig, 1927.

第15章

数学史家としてのアンドレ・ヴェイユ

高瀬正仁

1.　数学史家アンドレ・ヴェイユ

アンドレ・ヴェイユ (1906 -　) は代数幾何学の不定解析への応用に新生面を開いた数学者として名高いが，同時に稀有の数学史家でもあり，近代数学史，わけても数論史を中核に据えて多くの叙述を行なっている．数学史に寄せるヴェイユの関心の始まりは古く,『アンドレ・ヴェイユ自伝　ある数学者の修業時代』(稲葉延子訳，シュプリンガー・フェアラーク東京）によれば，エコール・ノルマルの一年目 (1922年) にすでにリーマンを読み始め，二年目にはフェルマを読んだということである．ヴェイユは「ずっと以前から，そもそもはギリシャの詩人たちを読みながら，人類の歴史において，きわめて優れた才能の持ち主だけが重要なのであり，彼らと知り合うための唯一の方法は，その作品に直接触れることだという確信を持っていた」(上掲書，40頁)．リーマンとの出会いの様子は次のように描写されている．

> この同じ年，私はリーマンを読み始めた．…… 私は，過去の偉大な数学者たちの著作に物質的，知的に手が届くようになるとすぐに，それらの研究に突き進むしかなかった．手始めがリーマンだった．私は彼の博士論文や，アーベル関数についての研究論文の大作を読んだ．…… リーマンを読むのは，彼にあってはそれぞれの語に意味が詰まっているのだということを理解しさえすれば，難しくはなかった (同上，41頁).

フェルマについての記述を探して1925年の記事に目を移すと，下記のような，ヴェイユの数論の核心に触れる言葉に遭遇する．当時，ヴェイユはすでにエコール・ノルマルを卒業し，教授資格試験 (アグレガシオン) にも合格していたが，まだ19歳にすぎなかった．秋10月のイタリア留学が目前に控えていたころの述懐である．

> 散歩の途中で，私はよく立ち止まり，ディオファントス方程式の計算ノートをひもといた．私はフェルマー方程式の謎に取りつかれていたが，何か新しい見解が生まれないかぎり先に進めないことも分かっていた．同時に，リーマンやクラインの著作を読んでいるうちに，双有理不変性の概念を第一に考えるべきだということを確信するようになっていた (同上，49 頁).

ここに明瞭に表明されているのは，フェルマに端を発する不定解析に対して，双有理不変性の概念を根底に据えて構成されるリーマン流の代数幾何学を武器として立ち向かおうとする，気宇の大きな数学的構想 (今日のいわゆる数論幾何の構想) である．しかも当初から「フェルマの大定理」が視圏にとらえられていたという事実も注目に値すると思う．ヴェイユは数学者としての歩みを始めたとき，すでに偉大な数学史家だったのである．

イタリア留学に続き，1926 年以降,「ヒットラー政権によってそれが潰滅する破局の時まで」(著作集自註『数学の創造』，杉浦光夫訳，日本評論社，191 頁)，ヴェイユはしばしばフランクフルト大学数学教室を訪問し，M. デーンが 1922 年に創立した数学史のセミナーに参加した．ヴェイユは数学史家としての経験を積むよい機会に恵まれたのである．清新の気に満たされたこの時期の体験がもとになり，後に N. ブルバキの『数学原論』の刊行が開始されたとき，ヴェイユは「歴史覚書」を附することを提案した．すると「しばらくの間，この仕事は誰よりも私の責任とされた」(同上，193 頁) ということである．

さて，ぼくはガウスの著作『整数論』(高瀬訳，朝倉書店) を手がかりとして，およそ 15 年前から近代数学史の組織的研究を始めたが，いたるところで有力な先行者ヴェイユの巨大な足跡をみいだして，しばしば茫然とさせられた．挙げるべき諸例は多いが，たとえば，ガウスの『整数論』にはフェルマ，オイラー，ラグランジュ，ルジャンドルという，数論における四人の先行者の研究への言及が見られ，おびただしい数の文献指示がなされている．ぼくはそれらの解明に大きな困難を感じ，同時に困惑したが，折しもヴェイユの著作『数論　歴史からのアプローチ』(足立・三宅訳，日本評論社．原著の刊行は 1983 年) が刊行された．見ると，ヴェイユはこの大著の中で，上記の四人の数学者の手になるガウス以前の近代数論に対して詳細な検討を加えていたのである．

ぼくは心から驚嘆したが，驚いたのはこればかりではない．たとえば，ガウスは「ガウス日記」の最終項 (第 146 項) において，四次剰余相互法則とレムニスケート関数の間に認められるという親密な関係に言及し，

> 帰納的に行なわれるあるきわめて重要な観察によれば，四次剰余の理論はレムニスケート関数と非常に美しい様式で結ばれる．すなわち，$a+bi$ は素数

とし，$a-1+bi$ は $2+2i$ で割り切れるとすると，合同式

$$1 \equiv xx + yy + xxyy \qquad (\mathrm{mod}\ a+bi)$$

の解の総個数は，

$$x=\infty,\ y=\pm i\ ;\ x=\pm i,\ y=\infty$$

も含めて，

$$=(a-1)^2+bb$$

となる．

と語っている．ぼくはこの謎めいた言葉の意味するところを理解することができず，今もなお悩まされている．ところがヴェイユは「数論に関する二つの講義　過去と現在」の中でこの言明に言及し,「それは，この曲線を対象とする「リーマン仮説」と同等である」(著作集 3，298 頁) と語っている．ヴェイユはヴェイユの視点から見てガウスの言葉を明快に解釈したのである．デデキントもバハマンもよくなしえなかったことであり，やはり刮目に値すると言わなければならないと思う．

驚きは増大するばかりだが，クンマー全集やアイゼンシュタイン全集を見れば，ヴェイユは序文の執筆者として登場し，加えて『アイゼンシュタインとクロネッカーによる楕円関数』という著作もある．数学史家としての守備範囲は異様に広く，リーマンはもとより，アーベル，ヤコビ，ディリクレ，ヒルベルト ……をも包摂して，近代数学史上のほとんどすべての大数学者が網羅されている．近代数学史の考察を進めていくうえで，ヴェイユの数学史は容易に追随を許さない遠い目標であり，一貫してぼくの指針であり続けたのである．

2.　ヴェイユの数学史論 — 検証と疑問 —

精密な実証の上に表明されるヴェイユの諸見解はみな明快であり，自信に満ちていて，魅力的である．しかし，同時に，ぼくはヴェイユの発言に心から共鳴したことは一度もなく，つねに違和感のみを感じていた．たとえば，ヴェイユはアイゼンシュタインによる楕円関数論とその高次相互法則への応用に関する諸論文について,「我々にとっては，そのような相互法則の証明の数々はたぶん，歴史的に見ておもしろい虚数乗法の例以上のものではない」(アイゼンシュタイン全集 1，序文，ix 頁) などと述べている．このような評価では，アイゼンシュタイン自身の意図は完全に無視されていると言わなければならない．数論におけるクンマーの業績に向けられた所見を見ると，ひたすら p - 進解析を賞賛し，それは「実際のところ彼の業績の最も深い部分であり，これよりもはるかに壮大な，フェルマの問題や相互法則への応用よりもおそらくずっと値打ちがあった」(『アイゼンシュタインとク

ロネッカーによる楕円関数』，87 頁) と言われている．ここでもまた，評価の様式はクンマー自身のねらいとは無関係である．

次に挙げる引用文の中では，同じ所見がいっそう露骨に語られている．

> これ［= 正則円分体における高次冪剰余相互法則］が，彼が 1848 年 2 月に初めて観測した山頂だった．その頂点に彼が到達したのは，10 年後のことである．おそらく彼は，これを生涯で最も永続性のある業績と思ったのだ．我々の目には，これはエヴェレストに登る訓練を重ねた人の，マッターホルンの最初の登攀の物語のようである (クンマー全集 1，序文，9 頁).

クンマーの数論を指して「エヴェレストに登る訓練を重ねた人の，マッターホルンの最初の登攀の物語」と評するヴェイユの言葉は，ヴェイユの数学史論の本質をあらわにして，まことに象徴的な一語である．ヴェイユは数学の創造に携わった数学者自身の企図には無頓着であり，ただ，数学全体の論理的構造のみに関心を寄せている．そうして「代数幾何学の数論への応用」という唯一の視点に立って数論史を俯瞰して，目に映じた情景を論理的に組み立て直したうえで明晰に描写した．このような極度に論理的な姿勢はかつて現代数学と呼ばれた数学の基本的性格に通じるものであり，ブルバキの『数学原論』もそのように構成されている．ぼくがつねに感じた違和感はこのようなヴェイユの姿勢に由来して発生したのである．なぜならぼくは，ヴェイユとは反対に，個々の数学者の数学的構想が連なって形成する一個の有機体の中に，数学史の成立の可能性をみいだしたいと願っていたからである[1]．

ぼくは数学史家としてのヴェイユの姿勢のすべてに対して反発を感じたわけではない．たとえば，ヴェイユは著作集自註『数学の創造』の中で，数学史家が保有してしかるべき特性というものに言及し，

> ……過去の大数学者をそれにふさわしく注釈するには，極めてすぐれた数学者を必要とする．それはオーケストラの大指揮者としては，すぐれた音楽家が必要なのと全く同じである．この場合重要なのは創造的な才能ではなく，知的な共感についての或る種の特性を持っていることである (同書，196 頁).

と語っている．これは数々の至言に満たされているヴェイユの語録の中で，ぼくの一番好きな言葉であり，同時に数学史家としてのヴェイユの深遠な魅力の源泉である．ただひとつの問題点は「知的な共感」という一語である．ヴェイユはなるほど「知的な共感についての或る種の特性」には濃密に恵まれていたと言えるであろう．しかし，他方，決定的な欠如を感じざるをえない面もある．それは，「情的な共感」を感受することのできる資質である．

---

[1] ぼくはこれを，ヴェイユの論理的立場に対して，「本質的立場」と呼びたいと思う．ただし，今日の数学では，他の自然諸科学と同様に，論理的連鎖の認識をもって本質の解明と考えるのが普通である．したがって，ぼくの語法は多少の混乱を引き起こす恐れがある．

ヴェイユが描き出した近代数学史の情景はぼくの目には全く見えないものばかりであった．しかし本稿におけるぼくのねらいはヴェイユの数学史論を否定することにあるのではない．数学史叙述はもとより歴史上の諸事実と矛盾することがあってはならず，ヴェイユ自身,「シモーヌ・ヴェイユ宛の手紙と抜粋」の中で，数学史に「原典の徹底的な研究なしに飛び込むのは全く無益である」(著作集 1, 255 頁) と明言している．だが，一般に歴史は純粋な客観知ではない．生きて動いている主体の目が，同じく生きて動いている対象に向かうときに感知される光景の多様性こそ，かえって歴史というものの本来の姿である．すなわち，歴史上の諸事実はひとつであっても，数学史論は決して唯一ではありえない．そうしてヴェイユはヴェイユなりに，独自の数学史論の中からひとつの大がかりな数学的構想を取り出したのである．その構想を実現に移そうとすると，谷山豊によれば,「そこには勿論，重大な障害が山積する．大抵の数学者は，そこで挫折するか，迂路を取る．然し彼は，始めの計画を変えない．障害を一つ一つ，強引に捩ぢ伏せる」(谷山豊全集，増補版，日本評論社，176 頁.「A.Weil をめぐって」より) ということになる[2)]．そこで谷山は,「この腕力の強さと息の長さ，それが彼の第二の才能[3)]である．単なる抽象以上に出たかれの業績の深遠さは，此処に由来するのである」(同上) と批評を加えたのである．

F. クラインは著作『19 世紀の数学』(彌永昌吉監修，石井・渡辺訳，共立出版) の中で数学者エルミートの資質に言及し,「数学における新しい方向の創始者ならもつはずの力強い一面性には恵まれていなかった」(同書，300 頁) と述べている．ヴェイユにはクラインの言う「力強い一面性」が十分に備わっていたように思われる．

こうしてヴェイユという一人の数学者において，数学と数学史の間に認められる親密な内的関連の様相が具体的に現われている．この点において，ぼくはヴェイユを範としたいと思う．そこでぼくは，本稿においてまず不定解析と平方剰余相互法則をめぐるヴェイユの考察と所見を一瞥し，それとは異なるもうひとつの光景をスケッチして，異なる数学史論というものの例示を試みる (第 3 章)．次に「ヤコビの逆問題」の原型を観察し，リーマンによる解決という共通の出来事に対する二通りの共感の様式，すなわち「知的共感」と「情的共感」の中から二つの数学史が流出する可能性を指摘したいと思う (第 4 章)．

---

2) ヴェイユの特徴をなす研究手法としてしばしば執拗なアナロジーの追求が語られるが，それも谷山の言う強引さの具体的な現われと見るのが至当である．

3) 谷山はヴェイユの「第一の才能」として,「彼はまず classic な理論の中から，本質的なもの，その keystone を鋭く見抜く．何が，如何に抽象され，一般化さるべきか？」(谷山豊全集，176 頁) という能力を挙げている．

3. 平方剰余相互法則

平方剰余相互法則はガウスの全数論の出発点となった「黄金定理」である.「平方剰余相互法則」という用語は後世の造語であり，ガウス自身による呼称は「平方剰余の理論における基本定理」というものである[4]．いずれにしても,「平方剰余」の一語が明示するように，この法則の成立舞台は二次合同式の世界である．実際，ガウスは大著『整数論』(高瀬訳，朝倉書店) を合同式というものの概説から説き起こし (第一章)，以下，順次「一次合同式」(第二章),「冪剰余」(第三章) へと歩を進めた．そうして第四章「二次合同式」において再度，二次合同式に立ち返り，平方剰余相互法則を厳密に証明したのである．それは数学的帰納法によるいわゆる「第一証明」である．第五章「二次形式と二次不定方程式」では，二次形式の種の理論に基づく「第二証明」が与えられている．

ガウスは平方剰余相互法則に証明を与えることに成功した最初の人物ではあるが，第一発見者というわけではない．実際，クロネッカーの精密な考証 (「相互法則の歴史」，クロネッカー全集 2，3 - 10 頁) によれば，オイラーこそ，この数学史上に名高い法則を初めて認識した人物である．ところがオイラーが住んでいた不定解析の世界は，ガウスが開いた合同式の世界とは一見して無縁である．すると最も基本的な問いとして浮上するのは，これらの二つの世界の相互関係を問う問いである．ぼくは両者は本質的に無縁であると確信するが，ヴェイユは有機的つながりを主張しているように思われる．次に引用するヴェイユの言葉はその明らかな証左と考えられるであろう．出典は「シモーヌ・ヴェイユ宛の手紙と抜粋」である．

> 合同式の概念それ自体が姿を現わしたのは，フェルマの最も重要な研究の目的をなしていた「ディオファントス」問題 (方程式を整数もしくは有理数を用いて解く問題) においてなのだ．一次のディオファントス問題 $ax + by = c$ は一次合同式 $ax \equiv c \pmod b$ と同等である．フェルマの手で究明がなされたタイプの二次方程式 (平方数への分解，$x^2 + y^2 = a$，方程式 $x^2 + ay^2 = b$ 等々) は合同式と同等ではない．だが，これらの方程式，わけても数を剰余と非剰余に区分けすることは，二次合同式の考察の中で大きな役割を演じるのだ (著作集 1，245 頁).

著作『数論　歴史からのアプローチ』におけるヴェイユの論証の精密さも際立っている．ヴェイユは「オイラー以来，平方剰余の名のもとに知られている事柄を観察しよう」(上掲書，62 頁．訳文は適宜改訂した．以下同様) と宣言し,「フェルマの小定理」から説き起こしている．ヴェイユによれば，フェルマ自身はいくつかの

---

[4] ルジャンドルは論理的に見てガウスの定理と同等の定理 (それは，ぼくの言う意味での「本質的な」視点から見れば，ガウスの定理とは根本的に異なっている) を発見し，それを「二つの奇素数の間の相互法則」と呼んだ．ルジャンドルとガウスによる二通りの呼称からキーワードを一語ずつ取って合成すると,「平方剰余相互法則」という言葉が成立する．

問題設定を通じて平方剰余相互法則に近接したが，惜しくも「二次相互法則を探り当てる好機を逸してしまった」(同上，63 頁) ということである．オイラーの数論の世界に移ると，フェルマの目を逃れた平方剰余相互法則がくっきりと立ち現われる．ヴェイユの言葉によれば，「オイラーはフェルマの歩んだ道のずっと先方をさまよっていた．彼が推測した事柄の中には，彼の埋蔵財宝のうちでもたぶん最も値打ちのある金塊，二次相互法則が隠されていた」(同上，210 頁) のである．

ここでは「直角三角形の基本定理」に範を求めて，ヴェイユの論証の様式を検証したいと思う．「直角三角形の基本定理」というのは，「$4n+1$ という形の素数はどれも，二つの平方数の和として書き表わされる」ことを主張する定理であり，フェルマの言明を受けて，オイラーが初めて証明した．それに関連するヴェイユの記述は二次形式論の言葉を用いてなされている．二次形式 X^2+Y^2 を取り上げよう．ヴェイユによれば，オイラーはまず，「$p=4n-1$ という形の素数はこの二次形式の素因数ではありえないこと，言い換えると，このような素数に対しては $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ となることを証明した」(同上，212 頁)．これは「フェルマの小定理」からの直接的な帰結である．1747 年には，「X^2+Y^2 の素因数はどれも a^2+b^2 と書くことができ，従って $p=4n+1$ という形であることが証明された」(同上)．さらに 1749 年には，「どのような素数 $p=4n+1$ も X^2+Y^2 の約数であること，すなわち，そのような素数に対して $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ となること」(同上) も示された．そこでこれらの結果を併せると，端的に「平方剰余相互法則の第一補充法則」が確立されたことになる．

いっそう一般に X^2+NY^2 (N はある与えられた数) という形の二次形式を取り上げて，上記のようなタイプの考察を重ねていけば，やがておのずと平方剰余相互法則に出会うであろう．オイラーは証明を与えることはできなかったが，それは「まもなく現われようとしている」という，確信に満ちた予感を表明していたということである (同上，281 頁)．このオイラーの歩みの先に控えていると想定されるのは，言うまでもなくガウスの「第二証明」である．こうして「二元二次形式論の創始者，フェルマ」(同上，312 頁) からオイラーを経てガウスに至る一筋の数論の道が浮上する．ヴェイユはそのように物語を語ったのである．

論理的な視点から見る限り，ヴェイユの論証は完璧であり，一点の非の打ちどころもない．しかしオイラーが証明したのはあくまでも直角三角形の基本定理なのであって，第一補充法則ではない．文献に即して観察すると，オイラーの証明は，(1) $4n+1$ 型の素数はある X^2+Y^2 という形の数の素因子であり，しかも，(2) X^2+Y^2 という形の数の素因子はどれも，a^2+b^2 という形に書き表わされる，という二つの事実から構成されている．ところがオイラーの数学的意図はさておき，証明の論理的構造のみに着目するならば，この証明はそのまま第一補充法則の証

明とみなされるのである．だが，今度は事はそれだけにはとどまらない．このヴェイユの物語る「平方剰余相互法則の形成史」には欠陥があり，オイラーとガウスの間には埋めがたい空隙が存在するとぼくは思う．実際，オイラーは「二次形式で表示される数の素因子の形状」に着目し，そこに開かれた場所において平方剰余相互法則を観察した．ところがガウスは平方剰余相互法則そのものから出発し，「二次形式で表示される数 (素数とは限らない) と，その表示に用いられる二次形式との相互関係」の中に，相互法則それ自体ではなくて，その一つの証明原理 (第二証明) を発見したのである．ガウスの歩みの方向はまさしくオイラーと正反対であると言わなければならないであろう．

オイラーが待ち望んだ証明はオイラーの歩みの延長線上には見つからない．ヴェイユの論理的立場では「歩みの方向」の相違を正確に識別することはできず，そのために，みごとな論理的整合性を保ちながら，本質的な誤りを内包する物語を構成してしまったのである．

4.　失われた数学史の発見と復興 — ヤコビ関数論の構想 —

エコール・ノルマルの一年目にヴェイユが読んだというリーマンの二論文，すなわち「一複素変量関数の一般理論の基礎」と「アーベル関数の理論」は，ファニャノとオイラーに始まる楕円関数論の歴史の最終的局面に出現した記念碑的作品である．このリーマンの一変数代数関数論は論理的には代数曲線論と見ることも可能である．数学史の流れは実際にそのように進行し，リーマンの理論を翻案して得られた新たな代数曲線論は，イタリア学派の代数曲面論を経て今日の代数幾何学への道を開いた．だが，リーマンが企図したのは「ヤコビの逆問題」を解決することであって，当初から代数曲線論がめざされていたわけではない．リーマンの意図はまたしても無視されたのである．

ぼくは「ヤコビの逆問題」の原風景を観察したいと思う．この問題は次のように表明されるのが普通である．

> アーベルの定理[5] に触発されて，彼［＝ヤコビ］は至るところ有限な二つの積分の和を二つ作った．
>
> $$\int^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_1$$
> $$\int^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} + \int^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{f_6(x)}} = u_2$$
>
> そして，［積分］上限の対称関数 $x_1 + x_2$ と $x_1 \cdot x_2$ は，2 変数 u_1 と u_2 の，当時知られていた意味における ——— つまり一価の！ ——— 4 重周期関数

5) 一般的なアーベル積分を対象とする加法定理．

であると主張した．これはもっとも低位の「アーベル関数」とよばれる（クライン『19 世紀の数学』，113 頁．$f_6(x)$ は 6 次多項式）．

こうしてヤコビの逆問題の解決に伴ってアーベル関数が登場し，楕円関数の虚数乗法論を範例とする，今日の「アーベル多様体の虚数乗法論」へと続く道が開かれた．すでにクラインのころ，アーベル関数は楕円関数の多変数への一般化と考えられていたわけである．しかしヤコビ自身が語るヤコビの逆問題の原風景はいくぶん様相が異なっている．ヤコビは論文「アーベル積分に関する覚書」（ヤコビ全集 2，85-86 頁）の末尾の註記の中で，まず「［楕円］関数 $x = \sin am(u)$ は一次方程式 $A + Bx = 0$ により u に関して与えられる．ここで A と B は，変数 u の実もしくは虚の各々の有限値に対してただひとつの有限値を取る u の関数である」（同上，86 頁）という状勢認識を表明した．そうしてそれと同様に，上記のクラインの記号を用いると，量 x_1 と x_2 は，二つの複素変数 u_1 と v_1 の一価関数 A, B, C を係数にもつ二次方程式

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

の二根になることを主張したのである（同上，86 頁）．これが「ヤコビの逆問題」の原型である．しかも論文「アーベル積分の理論が依拠する二変数四重周期関数について」（同上，25 - 50 頁）における分析によれば，x_1 と x_2 の二つの基本対称式は，クラインの言明におけるように，今日の意味でのアーベル関数である．従って x_1 と x_2 は，二次元のアーベル多様体上に拡がる二葉の分岐被覆域を存在領域とする複素二変数［解析］関数であることになる．これがヤコビの言う本来のアーベル関数である．ぼくはこの関数を，今日のアーベル関数と区別するために，新たに「ヤコビ関数」という名で呼びたいと思う．

クラインの解釈は論理的には正しいが，ヤコビ自身の意図が無視されているという意味において，本質的に誤っている．ヤコビの逆問題の解決を通じて真に認識されるのはアーベル関数ではなくてヤコビ関数であり，ヤコビはヤコビ関数を対象にして，一般化された虚数乗法論を構想したのである．この構想はエルミートに継承されたが，それ以降は忘れられたまま今日に至っている．種子が発見され，わずかに芽生えたにすぎない時点で放置された数学．これが，ぼくの言う「失われた数学史」である．

ヤコビとエルミートの理論を復興するためには，リーマンにならって，まず初めに多複素変数解析関数論の基礎を確立しなければならないであろう．それはヴァイエルシュトラスに端を発し，クザン，ハルトークス，E.E. レビを経て岡潔 (1901-1978) が歩んだ道筋である．そうしてヴェイユもまた，この道の存在に気付いていた気配がある．実際，ヴェイユはエコール・ノルマルの一年目に，リーマンに先立って図書室でハルトークスの著作を見つけ，アダマールのセミナーで，このフランス

では知られることの少なかった人物の多変数解析関数論を取り上げたと語っているのである (自伝, 39 頁). しかしヴェイユは結局, この歩みを断念した. 等しくリーマンから出発しながら, 1930 年代の初め, 岡潔はリーマンに「情的に共感して」多変数解析関数論への道を選び, ヴェイユは「知的に共感して」代数幾何学への道を選択したのであろうとぼくは思う. 60 ~ 70 年後の今日, ヴェイユの数論幾何は「フェルマの大定理」の解決をみて所期の目的が達成された. 多変数解析関数論のほうはといえば, 岡潔の理論により土台の構築がほぼ完成されたところである. それ故, ぼくらは今, 依然として, 遠い昔のヤコビとエルミートの理論を生い育てる事業に直面していると言えるのではあるまいか.

ヴェイユと岡潔の歩んだ道は分かれたが, この二人の大数学者の間にはおのずと通い合うものがあったようである. 昭和 36 年 (1961 年) 秋, ヴェイユは来日して, 奈良に岡潔を訪問した. 一夕, ヴェイユは奈良ホテルで岡潔夫妻をもてなし, 翌日, 今度は岡潔夫妻が奈良ホテルの向かいの日本料理店「菊水」でヴェイユ夫妻にごちそうした. 奥さんのみちさんは, 岡潔が文化勲章を受章したときのアルバムを持参した. 岡潔は次々に繰り出されるヴェイユの質問に和仏と仏和の二つの辞書で対応しようとしたが, なかなからちがあかない. するとヴェイユは「両方とも取上げてしまって, 自分でサッサと引いては, ここを見よと指さして示した」(『紫の火花』, 朝日新聞社, 291 頁). 食後, 奈良ホテルに向かう坂の途中でヴェイユが振り向いて,「あなたが文化勲章をもらったので, 奥さんはすっかりご満足ですね」(同上) と言った. そうして「何とも知れない人懐っこいほほえみを浮べた」(同上) ということである.

第16章

ポアンカレの Analysis situs

齋藤利弥

ポアンカレの論文の中に Analysis situs (位置解析) という表題のものが六篇ある．文献表の [1] ～ [6] がそれである．これらは多様体のトポロジーに関する研究である．

この問題の研究に取組むにいたった動機を彼自身が語っている興味ある文章がある．文献表の [7] がそれで，表題は《アンリ・ポアンカレの科学的業績の彼自身による分析》という意味である．これは 1901 年，ミッタク・レフラーの求めに応じて書いたものらしいが，何故かどこにも発表されずに埋もれてしまった．ポアンカレの死後，ミッタク・レフラーは彼の主宰する雑誌 Acta Mathematica の一巻としてポアンカレ追悼号を刊行し，それにこの文章を集録した．

これは 1901 年までの全著作について，その内容や研究目的についてポアンカレが自らコメントしたものである．その中で位置解析の研究について書かれている文章を要約すると次のようになる．

《図形の相対的な位置関係を問題とする，いわば定性的な幾何学が位置解析である．3 次元空間の位置解析はほとんど直観的な知識といってよい．しかし同じことを 3 より高い次元の空間に対して行なおうと思うと，それは非常な困難を伴う．しかし 3 次元の位置解析が数学のいろいろな分野できわめて有効に利用されていることを考えると，この強力な道具を高次元の場合にあきらめてしまうのは非常に残念である．

リーマンは高次元の位置解析の重要性を認め，それに関するいくつかの手稿を残した (文献表 [8])．それは不完全なものではあるが研究の指針として役に立つ．

リーマンの後にベッチがいくつかの基本概念を導入した．しかしベッチの後に続く人はいなかった．

私 (ポアンカレ) に関していえば，私のいろいろな研究が私を高次元の位置解析へと導びいた．三体問題の微分方程式の研究，二変数の多価関数の研究，多重積分の周期の研究，連続群の離散部分群の研究などを進めるためにはどうしても高次元の位置解析が必要であった.》

彼の位置解析の研究は，このようなはっきりした問題意識の下で始められたのである．

論文 1 においては，多様体，同相，向き付け，ホモロジー，基本群などの基本概念が次々に導入され，いくつかの定理 —— とえばベッチ数に関する双対定理，多面体に関するオイラーの定理の一般化などが証明されている．

1898 年，デンマークの数学者ヘーゴールが《代数曲面の連結性に関する位相的理論の研究》と題する論文 (文献表 [9]) を発表し，その中で論文 1 に述べられているベッチ数の双対性に関する定理は誤りであると断じて，一つの反例を挙げ，証明の中の不完全な点を指摘する．

ポアンカレはこれに答えて 1899 年に論文 2 を発表する．その中で彼はヘーゴールの反例はベッチ数の定義についての誤解に基づくもので，実は反例にはなっていないと反論するが，証明の不完全さに関してはヘーゴールの指摘を率直に認め，これを訂正するために複体のホモロジー論を展開し，それによって双対定理の証明をやり直している．

論文 3 ～ 6 を私はほとんど読んでいないので簡単に触れておく．論文 3 ではそれまであまり取り上げてこなかった多様体の捩れ係数が論じられている．そして論文の最後に《捩れがなく，すべての閉曲線が 0 にホモローグである閉多様体は球面と同相である》という定理が証明なしで述べられている．これはもちろん正しくない．

論文 4,5 は純粋なトポロジーというよりも，やや代数幾何的な傾向の論文であるらしい．

論文 6 で，彼は論文 3 の終りに述べた上記の定理が誤りであることを認め，自らその反例を与えている．ではホモロジーをホモトピーでおきかえたらどうなるか? 彼は《3 次元の閉多様体で，その基本群が単位元だけから成り，しかも球面と同相でないものがあるだろうか?》という疑問を提出してこの論文を終える．これがいわゆるポアンカレ予想として知られる問題の源である．

この論文を最後として，ポアンカレは二度とトポロジーには戻ってこなかった．

これから論文 1 の概要を紹介しようと思う．

1.　多様体の第一の定義

$F_1, F_2, \cdots, F_p$; $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数で連続微分可能，かつ

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} = p$$

とするとき，関係

$$F_1 = \cdots = F_p = 0\ ;\ \varphi_1 > 0, \cdots, \varphi_q > 0 \tag{1.1}$$

を満たす $\boldsymbol{R}^n$ の点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の集合を $n-p$ 次元の**多様体** (variété) とよぶ.

q 個の関係

$$F_\alpha = 0, \varphi_k = 0, \varphi_\gamma > 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, p,\ \gamma \neq k), \quad k = 1, \cdots, q. \tag{1.2}$$

のうち少くとも一つを満たす点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が存在すればその全体をこの多様体の完全境界という．そのような点が存在しないとき，境界がないといい，有界，連結で境界がない多様体を**閉多様体** (variété fermée) という.

2.　同相写像

V と V' を二つの多様体とする．$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

で V を V' にうつし，かつ V の近傍で連続微分可能で

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0$$

であるものが存在するとき，V と V' **同相** (homéomorphe) であるといい，この写像を**同相写像** (homéomorphisme) という．同相写像の作る群の研究が位置解析である (今の言葉でいえばこれは**微分同相** (difféomorphe) である).

3. 多様体の第二の定義

$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$; $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_q$ はパラメーター $y_1, y_2, \cdots, y_m$ の連続微分可能な関数で，領域 $\psi_1 > 0, \cdots, \psi_q > 0$ において

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\theta_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} = m$$

であるとき，関係

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \cdots, y_m) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \ ; \ \psi_1 > 0, \cdots, \psi_q > 0 \tag{3.1}$$

を満たす点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全体を m 次元の多様体という．

(3.1) で定まる多様体 V と，別の多様体

$$V' \ : \ x_i = \theta_i'(y_1', y_2', \cdots, y_m') \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とがあって $V \cap V'$ が空でない開集合を含むとき V と V' は互いに他の**解析的延長** (continuation analytique) であるという．

多様体の列 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ において V_1 と V_2，V_2 と $V_3, \cdots, V_{n-1}$ と V_n が互いに他の解析的延長であるとき $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ を**連結な鎖** (chaine continue) という．

多様体の集まり $\cup V_i$ で，そのうちの任意の二つが連結な鎖で結ばれるものを**連結な網** (réseau continue) という．今後は連結な網として表わされる集合を多様体とよぶ．現在の用語では各 V_i は座標近傍，それを定めるパラメーター y は局所座標である．今後はこの用語を用いることがある．

最後に第一の定義により定められた多様体が第二の定義に含まれることが証明されている．

4. 反対向きの多様体

(3.1) によって定義された多様体を V とする．

$y_1, y_2, \cdots, y_m$ が $z_1, z_2, \cdots, z_m$ の連続微分可能な関数で

$$\Delta = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_m)} \neq 0$$

とする．このとき

$$x_i = \theta_i(y(z)) = \theta_i'(z) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

は V と同じ図形を表わすが，これを

$$\Delta > 0 \text{ のときは } V, \quad \Delta < 0 \text{ のときは } -V$$

と定め，$-V$ を V の**反対向きの多様体** (variété opposée) とよぶ．

V が第一の定義で与えられているときの $-V$ の定義も与えられているが省略する．

5.　ホモロジー

V, W をそれぞれ $p, q\,(\leq p)$ 次元の多様体で $W \subset V$ とする．$q-1$ 次元の多様体 $v_1, v_2, \cdots, v_\lambda$ が W の完全境界をなしているとき

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$$

と書く．そして次のような文章が続く．

《さらに一般に k を正の整数，v を $q-1$ 次元の多様体とするとき，式

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4$$

は V の q 次元部分多様体 W が存在して，それの完全境界が v_1 とほとんどちがわない k_1 個の多様体，v_2 とほとんどちがわない k_2 個の多様体，$-v_3$ とほとんどちがわない k_3 個の多様体，$-v_4$ とほとんどちがわない k_4 個の多様体から成ることを表わす．この形の関係を**ホモロジー** (homologie) という．ホモロジーはふつうの等式と同じように結合される.》

《ほとんど同じ》というのは同じホモロジー類に属するということであろうが，ホモロジー類という概念が導入されていないのでこう書かざるを得なかったのであろう．また境界多様体の向きが，W からどう決まるのかも明らかでない．これは曖昧な文章である．

ホモロジー群という概念もここには登場しない．

6.　ベッチ数

V の部分多様体 $v_1, v_2, \cdots, v_\lambda$ の間に整係数のホモロジー $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_\lambda v_\lambda \sim 0$ が決して成り立たないとき，$v_1, v_2, \cdots, v_\lambda$ は線形独立であるという．

V の h 次元閉部分多様体全体の中で線形独立なものの最大数を $P_h - 1$ とするとき，P_h を V の h 次元の**ベッチ数** (nombre de Betti) と定義する (現在では $P_h - 1$ をベッチ数とよんでいる)．そしていくつかの例が挙げられる．

7. 積分の利用

m 次元多様体 V 上での m 重積分

$$\int_V \sum X_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_m} \tag{7.1}$$

が定義される．定義は現行のものと同じだから省略する．

U が $p(\geq m)$ 次元の多様体で $V \subset U$ とする．U において $V \sim 0$ のとき (7.1) が 0 になる条件 (可積分条件) が具体的に与えられている．現代風にいえば，それは

$$\omega = \sum X_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} dx_{\alpha_1} \wedge dx_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_m}$$

が閉形式である条件，$d\omega = 0$ である．

$V \not\sim 0$ ならば (7.1) は一般に 0 と異なる．そのときは線形独立な m 次元多様体 $W_1, W_2, \cdots, W_N (N = P_m - 1)$ が存在して，(7.1) は

$$\int_{W_k} \sum X_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_m} \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{7.2}$$

の整係数の線形結合になる．(7.2) をこの積分の**周期** (période) という．これらのことは証明なしで述べられていて，証明は文献表の論文 10 で与えているといっている．ただし論文 10 で証明されているのは $m = 2$ の場合だけである．こういうところはいかにもポアンカレらしい．

8. 一面的な多様体と両面的な多様体

多様体の閉じた連結な鎖 $v_1, v_2, \cdots, v_q, v_1$ を考え，v_i 内の局所座標を $y_1^i, y_2^i, \cdots, y_m^i$ とする．そしてこの局所座標は $v_i \cap v_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, q-1)$ において

$$\frac{\partial(y_1^{i+1}, y_2^{i+1}, \cdots, y_m^{i+1})}{\partial(y_1^i, y_2^i, \cdots, y_m^i)} > 0$$

となるように選んでおく．そのとき $v_q \cap v_1$ において

$$\frac{\partial(y_1^1, y_2^1, \cdots, y_m^1)}{\partial(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_m^q)} < 0$$

となるならば $v_1 \cup v_2 \cup \cdots \cup v_q$ は**一面的な鎖** (chaine unilatère) であるという．

多様体 V を連結な網 $v_1 \cup v_2 \cup \cdots \cup v_N$ によって表わしたとき，その中から一面的な鎖が取り出せるならば V は**一面的** (unilatère) であるといい，そうでないとき**両面的** (bilatère) であるという．そしてこの定義は V を構成する網のとり方に依存しないこと，また第一の定義によって定められた多様体はすべて両面的であることが示される．

現在では両面的を向き付け可能，一面的を向き付け不能とよんでいる．

9.　二つの多様体の交叉

V は p 次元，V' は $n-p$ 次元の両面的な多様体で

$$V = v_1 \cup v_2 \cup \cdots, \qquad V' = v'_1 \cup v'_2 \cup \cdots,$$

v_j, v'_j はそれぞれ局所座標 $y^j_1, \cdots, y^j_p$; $z^j_1, \cdots, z^j_{n-p}$ によって

$$x_i = \theta_i(y^j_1, \cdots, y^j_p) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$
$$x_i = \theta'_i(z^j_1 \cdots, z^j_{n-p}) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

のように表わされているとする．また $v_j \cap v_k \neq \emptyset$ のときはそこで

$$\frac{\partial(y^j_1, \cdots, y^j_p)}{\partial(y^k_1, \cdots, y^k_p)} > 0$$

となるように局所座標を選ぶ．V' についても同じである．V, V' は両面的だからこれは可能である．

M を V と V' の 交点とし $M \in v_j \subset V, M \in v'_k \subset V'$ とするとき

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y^j_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial y^j_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y^j_p} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_n}{\partial y^j_p} \\ \dfrac{\partial\theta'_1}{\partial z^k_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta'_n}{\partial z^k_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\theta'_1}{\partial z^k_{n-p}} & \cdots & \dfrac{\partial\theta'_n}{\partial z^k_{n-p}} \end{vmatrix}$$

の M における値を $f(M)$ とする．これは局所座標系の座標軸方向への接線ベクトルが張る立体の (符号付きの) 体積と考えてよいであろう．$f(M)$ は局所座標の取り方に依存するが，V, V' の向きを変えないように局所座標をとっている限り，$f(M)$ の符号は変らない．そこで $S(M)$ を

$$f(M) > 0 \quad \text{のとき} \quad S(M) = 1,$$
$$f(M) = 0 \quad \text{のとき} \quad S(M) = 0,$$
$$f(M) < 0 \quad \text{のとき} \quad S(M) = -1$$

と定義する．そして V と V' の交点を $M_1, M_2, \cdots$ とするとき

$$N(V, V') = \sum S(M_i)$$

とおく．

以上は $V, V' \subset \boldsymbol{R}^n$ として考えたが，k 次元の多様体 U があって，V が p 次元，V' が $k-p$ 次元の U の部分多様体であるときも同様にして $N(V, V')$ が定義される．それについて次のことを証明する．

U を h 次元の閉多様体，$V_1, \cdots, V_\mu$ を U の $h-p$ 次元閉部分多様体とする．このとき $\sum k_i V_i \sim 0$ であるための必要十分条件は，U の任意の p 次元閉部分多様体 V に対して

$$\sum k_i N(V, V_i) = 0$$

が成り立つことである．したがって p 次元の閉多様体の中で線形独立なものを $C_1, \cdots, C_\lambda$ $(\lambda = P_p - 1)$ とすれば

$$\sum k_i V_i \sim 0 \Longleftrightarrow \sum k_i N(C_j, V_i) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, \lambda).$$

これから容易に $P_{h-p} \leq P_p$ が得られ，p と $h-p$ を入れかえることにより $P_p = P_{h-p}$ が導かれる．

これは現在ではポアンカレの双対定理とよばれている．

ただしこの証明には不完全な点がある．ヘーゴールはそれを指摘したのであった．

10.　幾何学的表現

平面上の長方形の対辺を貼り合わせるとトーラスができるように，3 次元空間の中の多面体の面を二つずつ貼り合わせることによって，3 次元の多様体の実例を具体的に作ることができる．そのような例がここに五つ挙げられている．ただしその貼り合わせ方は全く任意に決めることはできなくて，ここで挙げた例のうち第二番目のものは実現不可能なことが示されている．ポアンカレはここで作った例を後にいろいろな事項の説明に利用しているのであるが，ここではすべて省略する．

11.　不連続群による表現

$\boldsymbol{R}^3$ に作用する真正不連続変換群を考える．このとき $\boldsymbol{R}^3$ は基本領域 $D_0, D_1, D_2, \cdots$ に分割され，D_i と D_k とは群の変換により互にうつり合う．いま D_0 と D_i とが隣接しているとしてその境界面を Σ とすると，D_i を D_0 にうつす群の変換により Σ の点 P は，D_0 の他の境界面上の点 P' にうつる．このとき P と P' は互に

共役であるという．D_0 の境界面上の互に共役な点を同一視することによって，D_0 から 3 次元の多様体を作ることができる．

そのような例が一つ挙げられている．三つの変換

$$(x, y, z) \longrightarrow (x+1, y, z),$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y+1, z),$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1)$$

から生成される群を $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ で表わす．ただし $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は整数で $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$．基本領域 D_0 としては六つの平面

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 1$$

で囲まれる立方体をとる．そしてこれの境界上の点

$$A : (0, y_1, z_1) \quad と \quad A' : (1, y_1, z_1),$$
$$B : (x_2, 0, z_2) \quad と \quad B' : (x_2, 1, z_2),$$
$$C : (x_3, y_3, 0) \quad と \quad C' : (x_3', y_3', 1)$$

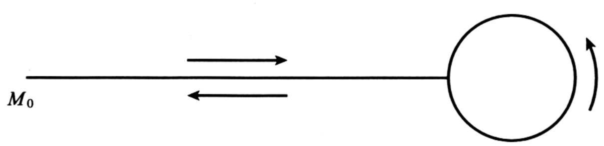
を同一視する．ただし $0 \leq x_3' \leq 1, 0 \leq y_3' \leq 1$ で

$$x_3' \equiv \alpha x_3 + \beta y_3 \pmod 1, \qquad y_3' \equiv \gamma x_3 + \delta y_3 \pmod 1$$

である．こうしてできる多様体は後で証明に利用される．

12.　基本群

M_0 を多様体 V の点とし，M_0 から発して M_0 に戻る向きのある閉路の全体を考える．



図示したような閉路を**輪道** (lacet) とよび，閉路 C が連続的に輪道に変形できるとき $C \equiv 0$ と書く．C と反対向きの閉路を $-C$ と書く．また M_0 から発する二つの閉路を C_1, C_2 があるとき，まず C_1 をまわり次いで C_2 をまわる閉路を $C_1 + C_2$ と定義する．

このようにして M_0 から発する閉路 $C_1, C_2, \cdots$ の間に

$$k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4 \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4\text{は整数})$$

のような関係が定義される．これを**同値関係** (équivalence) とよぶ．

このようにしていささか曖昧ながらホモトピーの概念が導入される．そして同値関係とホモロジーとの間の相異点として次の二つが指摘されている．

1. ホモロジーは任意の閉路の間で考えられるが，同値関係は起点が同じ閉路の間でしか考えられない．

2. $C_1 + C_2 \sim C_2 + C_1$ であるが $C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1$ とは限らない．

ここで次のような変換群 G を考える．

1. M_0 から発する閉路 C には G の変換 S が対応する．

2. C に恒等変換が対応する必要十分条件は $C \equiv 0$.

3. $C \to S, C' \to S'$ ならば $C + C' \to SS'$.

この群 G を多様体 V の**基本群** (groupe fondamental) とよぶ．これは現在基本群とよばれているものの変換群による同型表現である．

13. 基本的同値関係

基本群 G の生成元 $S_1, S_2, \cdots$ に対応する V の閉路 $C_1, C_2, \cdots$ を**基本的閉路** (cycles fondamentales) という．$S_1, S_2, \cdots$ の間にいくつかの関係が成り立つと $C_1, C_2, \cdots$ の間にもそれに対応する関係が成り立つ．それを**基本的同値関係** (équivalence fondamentale) という．

この関係において $\equiv$ を $\sim$ でおきかえ，結合が可換であるとみなせば基本的ホモロジーが得られ，ベッチ数 P_1 がわかる．V が 3 次元なら $P_1 = P_2$ だから，すべてのベッチ数がわかることになる．

ポアンカレは今までに挙げたすべての例について基本的閉路，基本的同値関係，ベッチ数を求めているがここでは省略する．ただ §11 で挙げた例は §14 で必要になるので結果だけを述べておく．

M_0 を多様体上の点とする．§11 の記号を用いると

$$C_1 = M_0AA'M_0, \quad C_2 = M_0BB'M_0, \quad C_3 = M_0CC'M_0$$

が基本的閉路で，基本的同値関係は

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2 \end{cases}$$

である．これから基本的ホモロジー

$$\begin{cases} (\alpha - 1)C_1 + \gamma C_2 \sim 0, \\ \beta C_1 + (\delta - 1)C_2 \sim 0 \end{cases}$$

を得る．したがって

(i) $(\alpha-1)(\delta-1) - \beta\gamma \neq 0$ 　ならば　$P_1 = P_2 = 2$,

(ii) $(\alpha-1)(\delta-1) - \beta\gamma = 0$ 　ならば $P_1 = P_2 = 3$,
ただし $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$ のときは $P_1 = P_2 = 4$.

であることがわかる．

14.　同相の条件

ベッチ数の等しい 2 次元の多様体は同相であることがわかっている．3 次元の場合にはこれが成り立たないことをここで証明する．そのためにはベッチ数は等しいが基本群が同型でないような多様体の例を作ればよい．

§11 でやったように群 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ と $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ の基本領域から二つの多様体を作る．この二つの多様体の基本群が同型である必要十分条件は，二つの行列

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

が $SL(2, \boldsymbol{Z})$ に関して同値であることが (長い計算の末) 証明される．一方これらの多様体のベッチ数は §13 で示したように 2, 3, 4 のどれかであるから，このタイプの多様体でベッチ数が等しく，しかも基本群が同型でないものが無数に存在することがわかる．

15.　他の生成法

ここでは多様体を具体的に作る新しい方法が提案されているが省略することにする．

16. オイラーの定理

V を p 次元の両面的な多面体とし，多面体を構成する胞体のうち k 次元のものを v_k と総称する．$v_p, v_{p-1}, \cdots, v_0$ の個数をそれぞれ $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_0$ とするとき

$$N = \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^p \alpha_p$$

の値を求める．

この節では二つの多面体が多様体として同相ならば N の値は等しいことを証明しようとしている．そのためにポアンカレは多面体を細分しても N の値が変らないことを証明する．そして二つの多面体が同相ならばそれらの細分で多面体として同型なものが存在するから N の値は一致すると主張する．しかしこれはトポロジーの基本予想《同相な多様体は PL 同相である》を仮定しているので正しい証明にはなっていない．

17. p が奇数の場合

V の次元 p が奇数の場合には $N = 0$ となることを巧妙な方法で証明している．しかしこれは次の §18 で得られる一般の結果に含まれているので省略する．

18. 第二の証明

ここで N の値を V のベッチ数で表わす式が求められる．

多面体の各頂点に数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{\alpha_0}$ を任意に割り当てる．

各稜に正の向きを任意に定める．$\overrightarrow{\mathrm{P_i P_k}}$ が一つの稜で，頂点 $\mathrm{P_i}, \mathrm{P_k}$ には γ_i, γ_k が割り当てられているならば，$\overrightarrow{\mathrm{P_i P_k}}$ には $\gamma_k - \gamma_i$ を割り当てる．このようにして稜に割り当てられた数を $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{\alpha_1}$ とする．これらの数のうち独立なものは明らかに $\alpha_0 - 1$ 個である．

δ の間に成り立つ関係式の数を計算する．稜をつないで一つの閉曲線を作り，それを一周する．そのとき δ_i が割り当てられている稜を正の向きにたどるならばそれに δ_i を，負の向きにたどるならば $-\delta_i$ を対応させる．そうするとこれらの総和 $\sum \pm\delta_i$ は 0 となる．

このような閉曲線は v_2 の周が α_2 個，0 にホモローグでないものが $P_1 - 1$ 個存在し，その他のものはこれらの結合として表わされるから，$\sum \pm\delta_i = 0$ という関係式で独立なものの数は $\alpha_2 + P_1 - 1$ より多くはない．それを

$$f_i(\delta) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \alpha_2 + P_1 - 1) \tag{18.1}$$

と書く．

この関係は独立ではない．v_2 のいくつかによって作られる 2 次元の閉多面を考える．(18.1) のうちで，この上にある v_2 の周に対応するものを

$$f_{i_1} = 0, \quad f_{i_2} = 0, \quad \cdots, \quad f_{i_k} = 0 \tag{18.2}$$

とする．V は両面的だから各々の v_2 の周をまわる向きをうまく選んで，その中に一つの稜が正の向きに 1 回，負の向きに 1 回現われるようにすることができる．したがって v_2 の周をまわる向きをそのように選んでおけば

$$\sum_{\gamma=1}^{k} f_{i_\gamma} \equiv 0$$

となる．したがって (18.2) のうち独立なものは $k-1$ 個である．

このような 2 次元の閉多面体は v_3 の表面が α_3 個，0 にホモローグでないものが $P_2 - 1$ 個ある．すなわち (18.1) の間には $\alpha_3 + P_2 - 1$ 個の関係式が存在する．それを

$$g_i(f) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \alpha_3 + P_2 - 1) \tag{18.3}$$

とする．

(18.3) はすべて独立ではない．v_3 のいくつかが 3 次元の閉多面体を作れば，それに現われる $g_i(f)$ について，やはり $\sum g_i \equiv 0$ が成り立つ．V が 3 次元の多面体ならば v_3 の作る閉多面体は自分自身だけしかないから，(18.3) のうちで独立なものは $(\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$ 個である．ゆえに α_1 個の δ のうち独立なものの数は

$$\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1.$$

4 次元の多面体のときは，同様に考えると

$$\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - (\alpha_4 + P_3 - 1) + 1$$

となる．これらを $\alpha_0 - 1$ に等しいとおけば

$$p = 3 \text{ のとき} \qquad N = -P_1 + P_2,$$
$$p = 4 \text{ のとき} \qquad N = 3 - P_1 + P_2 - P_3.$$

一般に，p が奇数ならば

$$N = -P_1 + P_2 - \cdots - P_{p-2} + P_{p-1}.$$

p が偶数ならば

$$N = 3 - P_1 + P_2 - \cdots + P_{p-2} - P_{p-1}.$$

$P_k = P_{p-k}$ に注意すれば p が奇数のとき $N = 0$ となる．

P_k のかわりに現行のベッチ数 $B_k = P_k - 1$ を用い，$B_0 = B_p = 1$ に注意すれば，上の式はよく知られた形

$$N = \sum_0^p (-1)^k \alpha_k = \sum_0^p (-1)^k B_k$$

になる．高次元の多様体に対するオイラーの標数がここで登場する．

[後記]　ポアンカレのこれらの論文の，筆者による邦訳が最近出版された．

『ポアンカレ トポロジー』(齋藤利弥訳)，朝倉書店，1996.

文献表

[1] Analysis situs, Journ.de l'École Polytech., 2^e série, 1^{er} cahier (1895).

[2] Complément à l'Analysis situs,Rend Circ. Mat.Palermo, t.13(1899).

[3] Second complément à l'Analysis situs, Proc. London Math. Soc., v.32(1900).

[4] Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'Analysis situs, Bull. Soc. Math. de France, t.30(1902).

[5] Sur les cycles de surface algébrique. Quatrième complément à l'Analysis situs, Journ. Math. pures et appl., t.8(1902).

[6] Cinquième complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo, t.18(1904).

[7] Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même, Acta Math., t.38(1921).

[8] B.Riemann. Fragment aus der Analysis Situs, Gesammelte Werke, Dritte Abtheilung XXIX.

[9] P. Heegaard. Forstudier til en topologisk teori főr de algebraiske Fladers Sammenhång, Copenhague, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen(1898).

[10] Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Math., t.9(1887).

第17章

基本予想をめぐって

松本幸夫

1.　基本予想とは

「基本予想」と聞いて読者は何を思い浮かべるだろうか．ああ，あの予想のことかとすぐにわかる人はすでにかなりの数学通のはずである．リーマン予想とかポアンカレ予想とかいうのと違って，基本予想というのはなんだか普通名詞みたいだから．

ところがこの普通名詞みたいな予想が 20 世紀のトポロジーに及ぼした影響には測り知れないものがある．杉浦光夫先生から 20 世紀のトポロジーについて話をするようにという，ちょっと後込みしそうな御依頼を受けたとき，迷ったあげく，やはりこれだと思ったのが基本予想だった．とは言え，私自身は 20 世紀の数学について特に調べたこともなく，極く常識的な知識しか持ち合わせていないのだが，幸い，手もとに L.C. ジーベンマンが 1970 年の国際数学者会議で行った「位相多様体 (Topological Manifolds)」という講演の出版されたもの [文献 1] があり，そこに 1 ページほど歴史的な記述があったので，それをたよりに，原論文を見たり，最近の話題など付け加えたりして話をまとめてみたのが以下の文章である．不十分な点がいろいろあると思われるので，ご指摘いただければ幸いである．

前置きが長くなってしまったが，基本予想の説明をしよう．一言で言えば，多様体やあるいはもっと一般的な多面体について，その組み合わせ構造と位相構造の差を問うのが基本予想，正確には,「位相幾何学の基本予想」である．ドイツ語で Hauptvermutung という．英語もこれで通じているようだ．

なぜこのようなことが問題にされるようになったかというと，それには次のような事情があると思う．

有名な「オイラーの多面体定理」を思いだしてみよう．凸な多面体の表面，それは位相的には 2 次元球面だが，それをいくつかの頂点と辺と三角形に分割する．分割によって得られた頂点の数を v，辺の数を e，三角形の数を f とする．例えば，

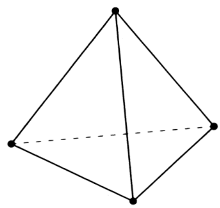


図 1

図 1 は四面体の表面を分割したものだが，ここでは，$v = 4, e = 6, f = 4$ となっている．

さて，$v - e + f$ という数を計算すると結果は分割によらずに，2 になる．四面体の場合にやってみると，

$$4 - 6 + 4 = 2$$

となって，確かに 2 である．だから，この 2 という数は分割によらない，球面 (S^2 とかく) という 2 次元空間に固有の数だと考えられる．この数のことを S^2 のオイラー数というのであった．オイラー数は通常，記号で χ と表すことが多い．ギリシャ文字のカイである．

シンポジュームで斎藤利弥先生がお話になったように，本格的なトポロジーは 19 世紀と 20 世紀の境目に書かれた H. ポアンカレの一連の論文 [2], [22] から始まった．ポアンカレはその論文のなかで，オイラー数をつぎのように一般化している．

いま，ある m 次元多様体 M があったとして，これを幾つかの頂点，辺，三角形，3 次元の四面体，$\cdots$, m 次元の四面体もどき (これを m 次元単体という) の集まりに分割したとしよう．そのとき，頂点が α_0 個，辺が α_1 本，3 角形が α_2 枚，$\cdots$, m 次元単体が α_m 個得られたとする．これらの数を使って計算した

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^m \alpha_m$$

という数 $\chi(M)$ は多様体 M の分割の仕方によらずに M だけで決まる．これを M のオイラー数と呼ぼうというわけである．オイラー数は多様体のトポロジカルな不変量として最も基本的なものである．

オイラー数の例に見られるように，ある空間からなんらかのトポロジカルな不変量を取り出すには，その空間を頂点 (0 次元単体)，辺 (1 次元単体)，三角形 (2 次元単体)，$\cdots$, m 次元単体の集まりに分割して調べるのがよい．分割を更に細かく細分してもその値が変らないことが，トポロジカルな不変量であるための必要条件である．

上でオイラー数が分割の仕方によらないと述べたが，これの証明は細分しても

不変だという性質に基づいてなされる．すなわち，もし，多様体 M が 2 つの別の仕方で分割されているとしよう．するとこの 2 つの分割の両方の共通の細分になっているような第 3 の分割が存在するはずである (図 2)．そうすると，オイラー数は細分しても変らないから，初めの 2 つの分割から計算したオイラー数の値は第 3 の共通分割を使って計算したオイラー数の値に等しい．結局両者は等しい．

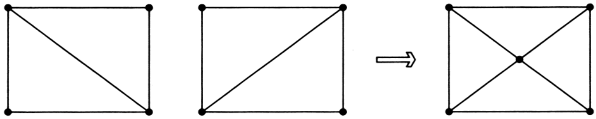


図 2

現代的なトポロジーでは，2 つの空間 M と N が同相 (homeomorphic) であるということをつぎのように定義する．

定義: M から N への 1 対 1 で上への連続写像 $f: M \to N$ があって，f の逆写像 $f^{-1}: N \to M$ も連続であるとき，M と N は**同相**であるといい，f を**同相写像**という．

上にのべたオイラー数の不変性の証明は共通細分の存在を認めた上での証明なので，いま定義した意味で，M と N が同相であるとき果して $\chi(M) = \chi(N)$ が成り立つかどうかは明らかでない．しかし 20 世紀の初めには，もっと便利な同相の定義を使っている人達がいた．1908 年=明治 41 年の E. シュタイニッツの論文 [3] によると，M. デーンと P. ヘーガードは同相をつぎのように定義していたという．

定義: M と N があらかじめ分割されているとして，M と N が「同相」であるとは両者が互いに同型な細分を持つことである．

このように「同相」を定義しておくと，M と N の間に「同相写像」があれば，それにより，適当な分割の頂点や三角形が互いに移りあうので,「同相」な M と N について $\chi(M) = \chi(N)$ がなりたつことは明らかである．今日ではデーン/ヘーガードの「同相」の概念は PL **同相**という言葉で表されている．PL とは piecewise-linear(区分的に線形) の略である．

こうなると本来の同相の概念と PL 同相の概念の差が気になるわけで，その差を問うのが基本予想というわけである．予想というのに問題の形で述べるのは少しおかしいが，一応問題の形で述べておくと次のようになる．

基本予想: M と N が同相であるとき，それらは PL 同相であるか．

ジーベンマン [1] によれば，基本予想を最初に述べたのはシュタイニッツ [3] だそうである．(ハーシュ[24] によれば，H. ティーツェ[25] だという．)

2. 1950年代までの発展

空間を分割して得られる不変量はオイラー数ばかりではない．ベッチ数などと言うのもあるし，もっと基本的な不変量としてホモロジー群がある．これは空間 M によって決まる一連の可換群

$$H_i(M), \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

であって，M の形状をうまく表すものになっている．ある空間のホモロジー群が決まれば，その空間のベッチ数やオイラー数は決まってしまう．ホモロジー群をきちんと定式化したのは誰なのか知らないが (H. ホップ [23] か)，実質的なことはポアンカレの例の一連の論文 [2] に書いてある．

ホモロジー群はもともと空間を分割して定義されるものなので，同型な分割を持つ 2 つの空間は同型なホモロジー群を持っている．従って，PL 同相な 2 つの空間のホモロジー群は同型である．そこで，もし基本予想が肯定的ならば，互いに同相であるような 2 つの空間は PL 同相ということになり，従って同型なホモロジー群を持つことになる．すなわち，基本予想が正しければ，ホモロジー群の位相不変性が証明出来るわけである．

この意味で基本予想は当時まことに基本的な問題であったと思われる．

ところが，1926 年になり，ホモロジー群の位相不変性は J.W. アレクサンダー [4] によって，基本予想を証明することなく，それを迂回する方法で，証明されてしまった．彼は今日言う所の単体近似の方法を開発し，それを使って証明したのである．(単体近似定理はたいていの教科書に書いてある．例えば，田村先生の本 [5] を見てください．)

基本予想は一見動機を失ったように見えるが，同相と PL 同相の差を問う基本予想の独自の重要性をあらためて指摘したのは (再びジーベンマンによると)H. クネーザーと J.W. アレクサンダーであったという．

基本予想は非常に素朴な問題でありながら，(むしろ非常に素朴であるがゆえに) とても奥の深い問題である．後で述べるように 1960 年代の終わりまでに 4 次元以外の多様体については基本予想は完全に解決されてしまった．ところが，4 次元多様体については，今日でも完全な解決にいたっていない．4 次元多様体についての基本予想は 21 世紀まで持ち越されそうである．

3 次元以下の多様体について触れておくと，3 次元多様体に関する基本予想は 1952 年に E. モイズによって肯定的に証明された [6]．その証明はやさしくはないが理論的には初等的方法である．また，1 次元多様体については自明であるし，2 次元多様体については分類理論からわかる．こうして，3 次元以下の多様体については 50 年代までに決着がついていた．

3. 高次元多様体

60 年代は 5 次元以上の多様体のトポロジーが爆発的に発展した時代で，1961 年にはS. スメールによって 5 次元以上のポアンカレ予想が解決され [7]，その方法を一般化した h-コボルデズム定理が証明された．また，J. ミルナーに始まる多様体の手術理論はS.P. ノヴィコフ，W. ブラウダー，D. サリヴァン によって発展し，C.T.C. ウオール によって完成された．このような大発展のひとつの頂点が，R. カービーと L.C. ジーベンマンによる高次元多様体に関する基本予想の完全解決である．1969 年のことである．私はそのときは大学院の修士課程の 2 年生だったが，非常なショックを受けて，一週間ほどご飯が喉を通らなくなってしまった．

カービーとジーベンマンの理論については後で述べることにして，基本予想に関する 60 年代最初の成果として

「多面体についての基本予想は一般には成立しない」

というミルナーの反例 [8] を紹介しよう．多面体というのは幾つかの単体が集まってできる図形のことで，多様体も適当に分割すれば多面体と考えられる．ミルナーの構成した反例は，ある一点に特異点があり，多様体ではないような多面体である．構成は次のようになされる．

まず，$L(p,q)$ をレンズ空間とする．これはある 3 次元多様体で，2 つの互いに素な自然数 p,q が与えられるとそれに応じて決まる空間である．その定義を述べよう．

複素 2 次元の数空間 $\boldsymbol{C}^2$ を実 4 次元のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ に同一視する．その単位球面

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

は 3 次元球面である．ω を 1 の原始 p 乗根として，

$$(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2)$$

で移りあうような S^3 上の 2 点を次々に同一視して行くと，S^3 を位数 p のある種の作用で割った商空間が出来る．これがレンズ空間 $L(p,q)$ である．その基本群は位数が p の巡回群なので，p と p' が違えば $L(p,q)$ と $L(p',q')$ はホモトピー同値でない．ましてそれらは 同相にならない．J.H.C. ホワイトヘッドによって，$L(p,q)$ のホモトピー型の分類がされており (1941)，また K. ライデマイスターによって $L(p,q)$ の PL 同相類が分類されている (1935)．これらの結果から，例えば，$L(7,1)$ と $L(7,2)$ はホモトピー同値であるが PL 同相ではないことが分かる．

ミルナーの証明の一つのキーポイントは 1960 年頃に証明された B. メイザー (現在，整数論で活躍している人) の定理で，その応用として，n が 3 以上のとき，

$$L(7,1) \times \boldsymbol{R}^n \cong L(7,2) \times \boldsymbol{R}^n \quad \text{(PL 同相)}$$

が示せる.

左右の空間にそれぞれ1点の無限遠点を付け加えて，それぞれコンパクト空間 X_1 と X_2 にする．いわゆる1点コンパクト化である．X_1 と X_2 は6次元以上で，両方とも多面体 (三角形や四面体などへ分割された空間) の構造を持っている．しかも，それぞれ，無限遠点のところに特異点がある．X_1 と X_2 は同相な空間 $L(7,1) \times \boldsymbol{R}^n$ と $L(7,2) \times \boldsymbol{R}^n$ の1点コンパクト化なので，これらの空間は互いに同相である．ところが「ド．ラームのねじれ (de Rham torsion)」と呼ばれる不変量を使うと，X_1 と X_2 はPL同相にならないことが証明できる．

以上がミルナーの証明の要点である．

X_1 や X_2 のように特異点を持つ多面体については基本予想は否定された．では特異点のない多面体 (PL **多様体**) についてはどうなのか，というのが60年代のトポロジーの主要な関心事の一つだった．

結局，この問題は前述のようにカービーとジーベンマンによって解決されるのだが，そのまえに出たノビコフ，サリバン，ウオールの仕事が非常に大きな役割を果たしたと思う．

ノビコフの結果 [9] は，ポントリャーギン類という，もともとは滑らかな多様体の滑らかな構造を使って定義される「特性類」が，有理数の係数で考えると位相不変になってしまうというもので，証明を見るまではそのアイデアは全く想像ができなかった．その証明は結局のところ，トーラスの埋め込み，手術理論，ヒルツェブルフの指数定理の3つを組み合わせたものだった．

サリバンの仕事 [10], [21] は，単体分割された2つの多様体の間のホモトピー同値写像を連続変形してPL同相に持ちきたす障害を論じるもので，これも修士課程の院生だったとき「トポロジー新人セミナー」という合宿で初めて噂をきき，大変な時代に突入したものだという気がして，時代の最先端に触れた思いがした．合宿所のあった乗鞍山麓の爽やかな空気とともに忘れられない思い出になっている．このサリバンの理論も手術理論を基本予想の研究に応用するものだった．

ウオールは多様体の手術理論を集大成したひとである．彼の本 [11] が出る前に，手術理論についての論文を送って欲しいと彼に手紙を出したところ，しばらくして小包のようなプレプリントがどさっと送られて来た．そんな大部の論文とは知らなかったのでびっくりしてしまった．

カービーとジーベンマンの理論 [12] のアイデアは n 次元トーラスから1点を取り除いた残りの空間が n 次元のユークリッド空間にはめ込めるという事実から出発する実に巧妙なものなのだが，議論はいわば「初等的」といってもよいものである．しかし，1ヶ所だけ，サリバンやウオールの理論の帰結，すなわち，ホモトピートーラスの分類定理を使うところがある．カービーとジーベンマンはもっと巧妙に理論を立てると，ホモトピートーラスの分類定理は無しですませられると

期待していたようであるが，やはり結局は，必要なのではないかと思う．(注: ホモトピートーラスとは n 次元トーラスと同じホモトピー型を持つ PL 多様体のことで，サリバンやウオールの理論を使って，その PL 同相類が C.T.C. ウオール，W.C. シアン，J. シャネソン等によって分類された．これがホモトピートーラスの分類定理である．)

カービー/ジーベンマンの定理は次のように述べることができる．

定理: M を 5 次元以上の位相多様体とすると，M に PL 多様体の構造を入れるための障害は $\boldsymbol{Z}_2$ を係数とする 4 次元コホモロジー群 $H^4(M;\boldsymbol{Z}_2)$ に入っている．また，M の上に 2 つの PL 多様体の構造があるとき，これらが連続変形 (イソトピー) で移りあうための障害は 3 次元コホモロジー群 $H^3(M;\boldsymbol{Z}_2)$ に入っている．

この定理の一つの帰結として，4 次元以下のホモトピー群が全て消えているような高次元位相多様体には唯一つの PL 構造が存在することがわかる．

4.　4 次元にある「何か」

カービーとジーベンマンの定理は高次元多様体に関するものであるが，実はおもしろいことに，彼等の理論の中に，4 次元の多様体についての基本定理「ロホリンの定理」が見えかくれしている．

ロホリンの定理: 4 次元の閉じた多様体 M がスピン構造を持てば，M の符号数は 16 で割り切れる．

この定理はロシアの V.A. ロホリンによって 1950 年代の初めに証明されていたものだが，こんな定理が，高次元多様体についての基本予想を解決した理論の中に顔をだしたので，初めはとまどった．(ロホリンの定理がいったい何を言っているのか説明する余裕がなくなってしまいました．例えば [13] などを参照していただければ幸いです．) M の符号数というのは，M の交点形式という整数係数の 2 次形式の符号数として定義されるものなのだが，M がスピン構造を持つと，その交点形式は 対角成分が全て偶数になる．そのような 2 次形式の符号数は必ず 8 で割り切れることは代数的に証明できる．ところがロホリンの定理はもしその 2 次形式がスピン構造をもつ 4 次元多様体の交点形式として与えられたものであれば，符号数はもっと強く 16 で割り切れることを主張しているのである．この 8 と 16 の 2 倍の差が，カービー/ジーベンマンの定理のコホモロジー群の係数の $\boldsymbol{Z}_2$ として現れる．

証明の過程では，この $\boldsymbol{Z}_2$ は手術理論を経由してロホリンの定理につながっている．要するに，カービー/ジーベンマンの $H^4(M;\boldsymbol{Z}_2)$ と $H^3(M;\boldsymbol{Z}_2)$ の中の障害類はロホリンの定理に起因するものである．高次元多様体の位相構造と PL 構造の差を支配していたのは 4 次元のロホリンの定理だったのだ!

しかし肝心の4次元多様体については，当時(1970年代)，基本予想は未解決のままだった．4次元には何かがあるのだが，その何かがどうしても分からないというのが70年代の状況だった．

この状況を80年代初頭に打ち破ったのがM.H.フリードマンとS.K.ドナルドソンである．

フリードマンの定理[14]を簡単化して言うと，要するにPL構造を考えない4次元位相多様体の世界は高次元多様体の世界とほとんど同じだ，ということである．だから高次元のポアンカレ予想がスメールによって解かれたのと同様にすれば未解決だった4次元ポアンカレ予想も解ける，というわけである．ドナルドソンの理論[15]は一層衝撃的だった．それはPL構造を考慮した4次元多様体の世界は高次元多様体の世界とは全く違っている，というのである．ドナルドソンはその事実を，物理に由来するゲージ理論を4次元多様体論に持ち込むことによって証明した．(この理論に興味のある読者は，深谷賢治氏の本[16]をご覧下さい．) なお，4次元では，PL多様体を考えることと微分可能多様体を考えることに本質的な差はない．

フリードマンは4次元の位相多様体は高次元と同じ様なものだと言い，一方，ドナルドソンは4次元のPL多様体は高次元とは全く違うというのだから，彼等2人の主張を合わせると，4次元では位相構造とPL構造とは全く違うのだ，ということが分かる．つまり，基本予想は4次元では成り立たない，ということである．そのことを最も印象的な形で述べたのが4次元異種空間の存在定理である．

定理: 4次元の数空間 $\boldsymbol{R}^4$ には，互いにPL同相でないようなPL構造が非可算無限個存在する．

「非可算無限個」という部分はC.タウベスによる．4次元以外の次元では $\boldsymbol{R}^n$ に入るPL構造はただ1個であることが分かっている．それに較べて，4次元での基本予想の破れ方がいかに激しいものかが分かると思う．カービー/ジーベンマンの定理は高次元でも基本予想が破れることをいっているが，その破れ方はロホリンの定理に由来する分だけであり，たかだかコホモロジー群 $H^3(M;\boldsymbol{Z}_2)$ で記述される小さな破れ方にとどまるのである．

ロホリンの定理を通して4次元は高次元の基本予想を支配しているが，その当の4次元では基本予想がモーレツに激しく破れていたわけである．

これで4次元についても基本予想が完全に分かったか，というと，破れ方の機構が解明されているというには程遠く，例えば，4次元球面 S^4 上に2つ以上のPL構造が入るかどうかは未解決である．前にも述べたように，S^4 上のPL構造が完全に分かるのは，多分，21世紀になってからだと思う．(未来は予想出来ないから，今年中にも解決ということもなきにしもあらずだが．)

皆さん，どうぞ長生きしてその解決を自分自身の目でご覧下さい．若い読者は，

頑張って解決に挑戦してみましょう．

5.　次元差のある場合

基本予想は PL 多様体の間の同相写像を PL 同相写像で近似する問題ととらえ直すことができる．この場合，2 つの PL 多様体は同次元である．基本予想と密接に関連する問題に，位相的埋め込みを PL 埋め込みで近似する問題がある．すなわち，m 次元 PL 多様体 M が q 次元 PL 多様体に位相的に埋め込まれているとき，この埋め込みを PL 的な埋め込みで近似できるか，という問題である．この場合，当然，q は m 以上である．

最も簡単な場合は，平面上にグシャグシャにかかれたジョルダン曲線を自己交差のない折れ線で近似する問題で，この場合は近似可能であることが比較的容易に証明される．一般の次元ではどうなのだろうか．

この問題に初めて突破口を開いたのは本間龍雄先生で，1960 年代の半ばに $q \geq \frac{3}{2}(m+1)$ の次元差があれば PL 近似が可能であることを証明された [17], [26, 251 頁]．この結果は R.T. ミラーによって改良され，$q \geq m+3$ の次元差 (余次元 $q-m$ が 3 以上) で PL 近似が可能であることが示された [18]．更に，$q = m+1$ (余次元 1) の場合，F.D. アンセル と J.W. キャノンによれば [19]，局所平坦近似が可能である (これが PL 近似できるかどうか，筆者は知らない)．ところが，$q = m+2$ (余次元 2) の場合には，PL 近似も局所平坦近似もできない例がいくらでも構成できる ([20])．

余次元 2 のときに PL 近似問題に多くの反例のあることと，4 次元が基本予想の破れをもたらす元凶の次元であることとは，実は「結び目」の現象を介してつながっているのである．

文献

[1] L.C.Siebenmann, Topological Manifolds,*Proc.ICM, Nice*, 1971, vol2, 133-163.
[2] H.Poincaré, Analysis Situs, *J.École Polytech.*, Paris(2)1 , 1895 1-121. およびその 5 つの補遺．邦訳 [22]
[3] E.Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs, *Sitzungs der. Berlin Math. Ges.* 7., 1908, 29-49.
[4] J.W.Alexander, Combinatorial Analysis Situs,*Trans.AMS.*,28, 1926, 301-329.
[5] 田村一郎『トポロジー』岩波全書，1972.
[6] E.Moise, Affine structures on 3-manifolds, *Ann. Math.*, 56 , 1952, 96-114.
[7] S.Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.*, 74, 1961, 391-406.
[8] J.Milnor, Two complexes that are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. Math.*, 74, 1961, 575-590.
[9] S.P.Novikov, On manifolds with free abelian fundamental group and applications (Pontrjagin classes, smoothings, high dimensional knots), *Izvestia Akad. Nauk. SSSR.*, 30 1966, 208-246.

[10] D.Sullivan, Triangulating homotopy equivalences, Ph.D. thesis, Princeton U., 1966. [21] も見よ.
[11] C.T.C.Wall, Surgery on compact manifolds, Acad.Press., 1971.
[12] R.C.Kirby and L.C.Siebenmann, On the triagulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull.AMS.* 75, 1969, 742-749.
[13] 松本幸夫『4 次元のトポロジー』日本評論社，1979. 増補版 1991.
[14] M.H.Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J.Diff.Geo.*,17, 1982, 357-454.
[15] S.K.Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *J.Diff.Geo.*,18, 1983, 269-316.
[16] 深谷賢治『ゲージ理論とトポロジー』シュプリンガー現代数学シリーズ，1995.
[17] T.Homma, Piecewise linear approximations of embeddings of manifolds, Mimeographed Notes, Florida State Univ., 1965. [26] の 251 頁も見よ.
[18] R.T.Miller, Approximating codimension 3 embeddings, *Ann. Math.*, 95, 1972, 406-416.
[19] F.D.Ancel and J.W.Cannon, The locally flat approximation of cell-like embedding relations, *Ann. Math.* 109,1979, 61-86.
[20] Y.Matsumoto, Wild embeddings of piecewise linear manifolds in codimension two, in *Geometric Topology*, ed. by J.Cantrell, Academic Press. 1978. 393-428.
[21] D.Sullivan, Triangulating Homotopy Equivalences and Homeomorphisms. Geometric Topology Seminar Notes, 1967 (A.A.Ranicki,ed. The Hauptvermutung Book, Kluwer Academic Publ., 1996, 所収.)
[22] ポアンカレ　トポロジー（斎藤利弥訳），朝倉書店，1996.
[23] H Hopf, Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. phys. 127-136, 1928.
[24] G.Hirsh, 位相幾何学（山下純一訳）（デュドネ編，数学史 1700-1900 III, 上野健爾他訳，岩波書店，1985, 所収.）
[25] H.Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionler Manningfaltigkeiten, Monatsh. f. Math. Phys. 19, 1908, 1-118.
[26] T.B.Rushing, Topological Embeddings, Academic Press, 1973.

第18章

代数群と保型関数の二三の話題について

佐武 一郎

1.

20 世紀を 1950 年を境にして前半と後半とに分けて考えるとき, その前半は二つの大戦を含む動乱期であり，数学的には（抽象化が進んだとはいえ）前世紀の延長発展の時期であったといえる．この時期を仮に “19.5 世紀” とよぶことにしよう．真に 20 世紀的数学は戦後 1950 年頃から（さらに Grothendieck が現れてから）始まるといってもよかろう．この講演では代数群，保型関数に関係するいくつかの話題（玉河数，数論的商空間，志村多様体等）について，その 19 世紀，または 19.5 世紀における根元と 20 世紀における新しい観点とを対比させて説明してみたいと思う. (講演においては 4,5 節の話は省略した.)

2.　代数群

まず代数群の概念について簡単に説明しておこう．よく知られているように，リー群の概念は前世紀後半 S. Lie によって導入され，その基礎理論は今世紀前半（19.5 世紀）に F. Engel, E. Cartan, H. Weyl 等によって完成された. (大局的 Lie 群の概念は C. Chevalley [Ch2] によって確立された.）特に半単純リー群とよばれるものは（その adjoint 表現を考えればわかるように）本質的に代数的な群，すなわち代数方程式で定義される群である．このように群であると同時に代数多様体であり，群の演算がその有理写像によって与えられるものを一般に**代数群**という．代数群 G の定義方程式および群演算を与える有理写像の係数がある体 F の中にとれるとき，G は “F 上定義される” という．たとえば，$GL_n(\boldsymbol{R}), SL_n(\boldsymbol{R})$ 等は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上定義された（アフィン）代数群である. ($GL_n(\boldsymbol{R})$ はアフィン空間 $\boldsymbol{R}^{n^2+1}$ において方程式 $\det(x_{ij}) \cdot y = 1$ によって定義される多様体とみるのである.)

リー群の範囲で考えれば，代数群はその特別なものに過ぎない．しかし，代数群 G がある体 F の上で定義されれば，F を含む任意の体 F' に対して，G の F'-rational な点の作る（抽象）群 $G(F')$ を考えることができる．特に F が有限次代数体ならば，その附値 v による完備化 F_v を代入して（局所コンパクトな）位相群 $G(F_v)$ を，さらに F の“アデール環” $A_F = \prod_v{}' F_v$ を代入して $G(A_F)$ を作ることができる．このように代数群は一種の関手 (functor) の働きをする所が 20 世紀的である．この立場をさらに進めれば，“群スキーム”の概念がえられる．

((アフィン) 代数群を最初に系統的に扱った論文は [B1] (1956) である．その一般論については [B2], [Sp], [P-R] 等，特に分類理論については [Ch3], [Sa2], [Ti] 等を参照.)

3. Dirichlet 単数定理と玉河数

有限次代数体の整数環に関する類数の有限性と Dirichlet の単数定理は代数的整数論の基礎である．これらの定理は，最も簡単な代数群 GL_1 のアデール化，すなわち“イデール群”を考えることによって，非常に自然に定式化され証明される．(イデールの概念は Chevalley [Ch1] (1940) によって導入された．その一般論については [W4] 参照.)

以下，F を有限次代数体，$\mathcal{O}_F$ をその整数環とする．F の有限素点（非アルキメデス的附値）$v = \mathcal{P}$ に対し，完備化 $F_\mathcal{P}$ の整数環を $\mathcal{O}_\mathcal{P}$ とかく．また無限素点の集合を S_∞ とし，$v \in S_\infty$ の中，F_v が実数体 $\boldsymbol{R}$, 複素数体 $\boldsymbol{C}$ になるものの個数をそれぞれ r_1, r_2 とする．

$$F_\infty = \prod_{v \in S_\infty} F_v = \boldsymbol{R}^{r_1} \times \boldsymbol{C}^{r_2}$$

とおく．アデール環

$$A_F = \prod_v{}' F_v = (\prod_\mathcal{P}{}' F_\mathcal{P}) \times F_\infty$$

は $\{\mathcal{O}_\mathcal{P}\}$ に関する“制限直積”として定義される，すなわち A_F は，直積 $\prod_v F_v$ の元 $x = (x_v)$ で，殆どすべての $\mathcal{P}$ に対し $\mathcal{P}$-成分 $x_\mathcal{P}$ が $\mathcal{O}_\mathcal{P}$ に含まれるもの全体からなる環である．A_F は，部分環 $\prod_\mathcal{P} \mathcal{O}_\mathcal{P} \times F_\infty$ が開部分環になるような位相に関して，局所コンパクトな位相環になる．以下，一般に 1 をもつ可換環 R に対し，その単数群（可逆元全体の作る乗法群）を $R^\times$ で表す．

$G = GL_1$（体の乗法群）に対し，

$$G(A_F) = A_F^\times = \prod_v{}' F_v^\times = (\prod_{\mathcal{P}}{}' F_{\mathcal{P}}^\times) \times F_\infty^\times$$

を F の**イデール群**という（$\prod'$ は $\{\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^\times\}$ に関する制限直積を表す）．代数的にはイデール群 $A_F^\times$ はアデール環 A_F の単数群であるが，その位相は A_F のそれから induce されるものではなく，$A_F^\times$ を $A_F \times A_F$ の中に $xy = 1$ によって定義される双曲線として埋め込んで得られるものである．それは

$$U = (\prod_{\mathcal{P}} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}^\times) \times F_\infty^\times$$

が開部分群になるように定義された位相と一致し，それに関し $A_F^\times$ は局所コンパクトな位相アーベル群になる．$G(F) = F^\times$ を，対角的な埋め込みによって $G(A_F) = A_F^\times$ の部分群（主イデール群）とみなせば，$F^\times \cap U = \mathcal{O}_F^\times$ は U の離散部分群であるから，$F^\times$ は $A_F^\times$ の離散部分群になる．

$A_F^\times$ の元（イデール）$a = (a_v)$ に対し，そのノルムを

$$|a|_A = \prod_v |a_v|_v$$

（実質的には有限積）によって定義する．ここに $|\cdot|_v$ は F_v における正規化された附値を表す．$A_F^\times$ のノルム 1 の元からなる部分群を $G(A_F)^1 = A_F^1$ とかく．そのとき，附値の積公式により，$F^\times$ は A_F^1 に含まれ，商群 $A_F^1/F^\times$ はその位相に関してコンパクトになる．イデール群の構造を考えれば，このことが上記（19 世紀の）二つの定理と同値であることがわかる（図式 1 参照）．

イデール群には次のようにして自然な測度を導入することができる．不変微分形式 $\omega = dx/x$ から出発し，それによって定まる $F_v^\times$ のハール測度を ω_v とし，$A_F^\times$ のハール測度を

$$\omega_A = \left(\prod_{\mathcal{P}} \frac{\omega_{\mathcal{P}}}{1 - N\mathcal{P}^{-1}}\right) \cdot |\Delta_F|^{-1} \omega_\infty, \quad \omega_\infty = \prod_{v \in S_\infty} \omega_v$$

によって定義する．ただし Δ_F は F の判別式である．そのとき，

$$\int_{A_F^1/F^\times} \omega_A = \rho_F = \mathrm{Res}_{s=1} \zeta_F$$

が成立する．ここに ζ_F は代数体 F の Dedekind ゼータ関数，ρ_F はその $s = 1$ における留数である．この関係は ζ_F（さらに Hecke の量指標の L-関数）をイデー

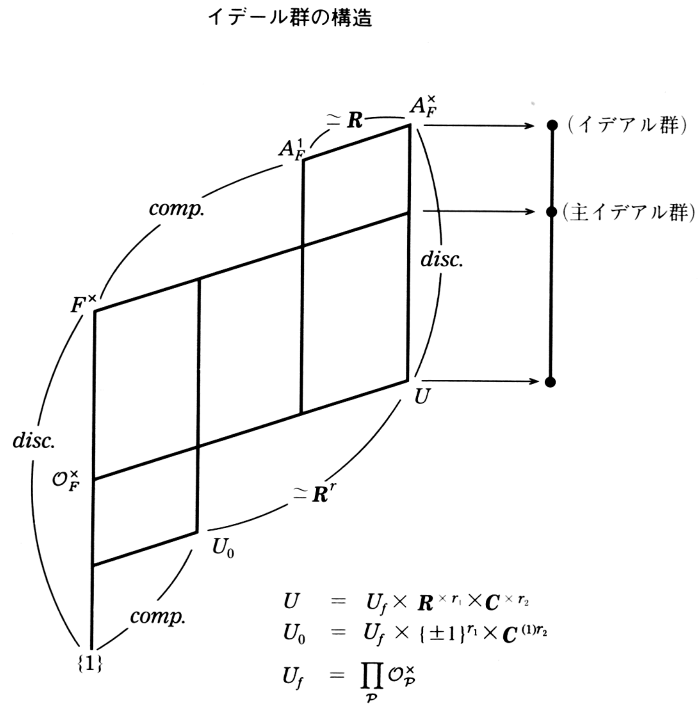


図 1

ル群上の積分で表すという Iwasawa-Tate の理論 ([Iw], [Ta], 1950 年頃) からえられる．この理論によって ζ_F の関数等式，留数 ρ_F の具体的な形等もえられる．

上の結果は一般の簡約 (reductive) な (連結) 代数群 G の場合に拡張される．この場合にも $G(A_F)$ に対して，すべての F-rational な指標のノルムの核の共通部分として $G(A_F)^1$ を定義すれば，$G(A_F)^1/G(F)$ は測度有限になり，それがコンパクトになるためには G の半単純部分 G^s が F-rank 0 であることが必要十分である (Borel-Harish-Chandra, Mostow-Tamagawa の定理 [B-H], [M-T], 1962)．これは対応する $G(F_\infty)^1$ の離散部分群 $G(\mathcal{O}_F)$ に関する類似の定理と同値である．

一般の場合にも，G の最高次不変微分形式 ω から上と同様にしてアデール群 $G(A_F)$ の自然な測度 ω_A を定義することができる (それは ω のとり方に関係しない)．これに関する $G(A_F)^1/G(F)$ の体積を，G/G^s の指標群に対応する Artin L-関数の $s=1$ における Laurent 展開の初項の係数で割った比 $\tau_F(G)$ を G の**玉河数**とい

う.(上の例では $\tau_F(GL_1)=1$ である.) 特に G が半単純，単連結のとき，$\tau_F(G)=1$ であろう というのが A. Weil の予想であったが，Weil ([W1], 1961), Langlands, Lai 等の基本的結果を経て Kottwitz ([Ko1], 1988) によって最終的に解決された. これは Minkowski, Siegel 等 による種々の数論的不連続群の基本領域の体積に関する（19.5 世紀的）計算を統合するものといえる.

たとえば，$F=\boldsymbol{Q}, G=SL_n$ の場合，$\tau_{\boldsymbol{Q}}(SL_n)=1$ であるが，これは Minkowski ([Mi], 1905) の公式

$$\mathrm{vol}(SL_n(\boldsymbol{R})/SL_n(\boldsymbol{Z}))=\prod_{k=2}^{n}\zeta(k)$$

と同値である. また G が F 上の 2 次形式 Q に対応する特殊直交群 $SO_n(Q)(n\geq 3)$ である場合，$\tau_F(G)=2$ であるが，これは（玉河氏が最初に指摘したように）2 次形式に関する有名な Siegel の基本定理 [Si1] (1935-37) と本質的に同値である.（この定理の解析的意味については [W2] 参照.）

（トーラス群の玉河数については小野の研究 [O2] がある. また玉河数に関する文献等については [W1] (Birkhäuser, 1982) の小野による付録参照.）

4. 類体論と Langlands 予想

Legendre, Gauss の平方剰余の相互法則に端を発し，1920 年代に高木-Artin によって完成された類体論は，Chevalley によりイデール群を使って次のように定式化された（[Ch1], [W4]）. すなわち，有限次代数体 F の最大アーベル拡大を F_{ab} とすれば，イデール類群 $A_F^\times/F^\times$ からガロア群 $\mathrm{Gal}(F_{ab}/F)$ の上への標準的準同型があり，その核は前者の連結成分になるのである. これはいいかえれば，ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の 1 次表現（指標）がイデール類群上の固有関数（指標）と対応していることを意味する.

この観点から，類体論の非アーベル拡大への拡張として，Jacquet-Langlands ([J-L], 1970) は $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ (または Weil 群) の 2 次表現と $L^2(GL_2(A_F)/GL_2(F))$ に含まれる既約表現との（L-関数を媒介とする）対応を考察した. $L^2(GL_2(A_F)/GL_2(F))$ は自然な意味で $GL_2(F_\infty)$ の数論的離散部分群に関する保型形式の空間のアデール化と考えられるので，この L^2 -空間からえられる $GL_2(A_F)$ の（既約）表現を一般に “保型表現” という. 実際，Jacquet-Langlands 理論は上記 Tate 理論の拡張であると同時に，ヘッケ作用素の固有関数であるモジュラー形式にある種の関数等式およびオイラー積をもつ Dirichlet 級数を対応させるという（19.5 世紀の）Hecke 理論（さらにその逆対応をあたえる Weil の結果 [W3]）の表現論的解釈を与えている. 一般にガロア表現と保型表現とのこのような対応が GL_n の場合にも成立する

であろうというのが "Langlands 予想" である．この予想に関しては，局所体，関数体の場合も含め，かず多くの結果が得られているが未だ（GL_2 の場合にも）完全な解決には到っていない．(たとえば，[B-C] 参照．Langlands 予想は Artin L-関数の正則性に関する Artin 予想と密接に関連している．また最近 A. Wiles によって部分的に証明された "谷山-志村予想" との類似にも注目すべきである.)

5. 数論的部分群，数論的商空間，多変数モジュラー関数

まず古典的なモジュラー関数について簡単に復習する． $G = SL_2(\boldsymbol{R})$ の部分群 $\Gamma = SL_2(\boldsymbol{Z})$ をモジュラー群という．G の元 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は複素上半平面 $\mathcal{H}$ に 1 次分数変換

$$z \mapsto g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

として作用する． Γ は G の離散部分群になるから，$\mathcal{H}$ に不連続群として作用する．(その基本領域の図はすでに Gauss によってえられていたという.) 商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$（それは基本領域の境界の Γ -同値な点を一致させたものと考えてもよい）は無限遠点 ∞ をつけ加えてコンパクト化され，1 次元複素射影直線（あるいはガウス球面） $P^1(\boldsymbol{C})$ と同型になる．このコンパクト化された商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{H}\cup\{\infty\}$ 上の有理型関数，すなわち $\mathcal{H}$ 上の Γ -不変な有理型関数で ∞ においても有理型になるものを一般に**モジュラー関数**という．特に標準的なモジュラー関数

$$j(z) = \frac{g_2(z)^3}{g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2}$$

は $\Gamma\backslash\mathcal{H}\cup\{\infty\}$ から $P^1(\boldsymbol{C})$ への同型写像を与える．(g_2, g_3 は Eisenstein 級数によって定義されるモジュラー形式である.)

この商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ は楕円曲線のモジュライ空間になっている．すなわち，楕円曲線を

$$E = \boldsymbol{C}/L, \quad L = \boldsymbol{Z}\omega_1 + \boldsymbol{Z}\omega_2, \quad \operatorname{Im}\omega_1/\omega_2 > 0,$$

の形にかけば，E の同型類は $z = \omega_1/\omega_2$ の Γ -同値類（すなわち $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ の点，あるいは対応する $P^1(\boldsymbol{C})$ の点 $j(z)$ ）によって一意的に定まる．したがって（大ざっぱにいえば） $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ を底空間，楕円曲線をファイバーとするファイバー空間がえられる（図 2）．これが 19 世紀楕円関数論の骨組みをなす幾何学的構図である．

モジュラー群，モジュラー関数の概念は前世紀末 H. Poincaré, F. Klein 等によって一般のフックス群，フックス関数に拡張された．その高次元への拡張は（19.5 世紀に）主として C. L. Siegel によって遂行された ([Si2],[Si3])．このとき，まず問題になるのはその基礎になる空間と不連続群をどのように一般化するかである．

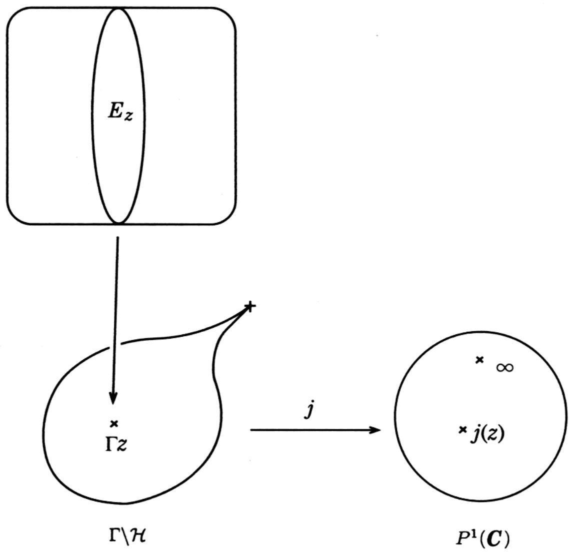


図 2

Siegel に従えば，上半平面 $\mathcal{H}$（または単位円）の拡張としては E. Cartan ([ECa], 1935) によって導入された "対称領域"（またはエルミット対称空間）$\mathcal{D}$，不連続群の拡張としては $\mathcal{D}$ の解析的同型群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ の離散部分群 Γ を考えるのが最も自然である．G は本質的に $\mathcal{D}$ の等長変換群と一致し，半単純リー群になるから，代数的である．したがってより一般的な setting として，$\boldsymbol{R}$ 上定義された半単純代数群 G で，その $\boldsymbol{R}$ -rational な元の群 $G(\boldsymbol{R})$ に対応する対称空間が対称領域になるようなものを考える（このような G を "エルミット型" という）．Γ の作り方としては，G が $\boldsymbol{Q}$ 上定義されている（すなわち，$\boldsymbol{Q}$ 上定義された行列群 $\subset GL_n$ として与えられている）とき，$G(\boldsymbol{Z}) = G \cap GL_n(\boldsymbol{Z})$, およびそれと commensurable な部分群をとることができる．これを $G(\boldsymbol{R})$ の "数論的部分群" という．実際，数論的部分群 Γ が定義する $\mathcal{D}$ の変換群は $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ の離散部分群であり，商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ は体積有限である．(逆に，Margulis の定理 ([Ma], 1973) によれば，対称領域 $\mathcal{D}$ が階数 1 の既約因子をもたないとき，この性質をもつ $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$ の離散部分群はすべて数論的部分群からえられる.)

古典的モジュラー群 $SL_2(\boldsymbol{Z})$ およびその合同部分群は（自然な $\boldsymbol{Q}$ -構造に関する）$SL_2(\boldsymbol{R})$ の数論的部分群である．

$G = Sp_{2n}$（シンプレクテイック群）は典型的なエルミット型半単純代数群で，その自然な $\boldsymbol{Q}$ -構造に関して $\Gamma_n = Sp_{2n}(\boldsymbol{Z})$（ジーゲルモジュラー群）は数論的部分群である．$G$ に対応する対称領域はジーゲル上半空間

$$\mathcal{H}_n = \{Z \in M_n(\boldsymbol{C}) |\, {}^tZ = Z, \operatorname{Im} Z > 0\}$$

として実現され，G の $\mathcal{H}_n$ への作用は，$n = 1$ の場合と同様，1 次分数変換で与えられる．Siegel はこの $\mathcal{H}_n, \Gamma_n$（および他の古典群の場合）に対して，保型形式に関する基本的な研究を行った ([Si2], 1939).

一般に数論的部分群 Γ による商空間 $\Gamma\backslash\mathcal{D}$ を“数論的商空間”という．Γ が固定点をもたなければ，$\Gamma\backslash\mathcal{D}$ は（双曲的）複素多様体になる．$\boldsymbol{Q}$ -rank $G = 0$ ならば，それはコンパクトで,（小平の定理により）射影多様体になる．$\boldsymbol{Q}$ -rank $G > 0$ のとき，$\Gamma\backslash\mathcal{D}$ はコンパクトではないが，自然な方法で（適当な低次元数論的商空間を有限個付け加えることによって）コンパクト化され，やはり射影多様体になる ([Sa1], [B-B])．たとえば，ジーゲルモジュラー群の場合，$\mathcal{V}_n = \Gamma_n\backslash\mathcal{H}_n$ は $\mathcal{V}_k\,(0 \le k \le n-1)$ を付け加えることによってコンパクト化される ([HCa, Exp.12,13], 1958).

$\mathcal{V}_n$ は n 次元（主）偏極アーベル多様体のモジュライ空間になっている．この見地から，一般に数論的商空間を底とし，アーベル多様体をファイバーとするファイバー空間（“久賀のファイバー空間”[Ku]）を考えることは興味深い．実際，モジュラー形式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ のフーリエ係数に関する Ramanujan-Petersson 予想はこの種のファイバー多様体の合同ゼータ関数に関する Weil 予想に帰着させることによって証明されたのであった（[K-S], [Ih], 1965-67）．“ヤコービ形式”はこのようなファイバー空間の上の保型形式である．

一方，一般に Mumford 等によりトーラス埋め込みの方法を使って数論的商空間の非特異なコンパクト化も構成されている（[A-M-R-T], 1975）．これは上記標準的コンパクト化に関する幾何学的不変量の考察，$\boldsymbol{Z}$ 上のモデルの構成等において非常に有用である．

6. 虚数乗法論と志村多様体

話は再び前世紀にさかのぼる．L. Kronecker は 1853 年に「有理数体のアーベル拡大はすべてある円分体に含まれる」という（意味の）定理を言明した．この定理の完全な証明は後に H. Weber (1886) によって与えられた．Kronecker は更に虚 2 次体のアーベル拡大も同じように楕円関数やモジュラー関数の特殊値をつけ加えることによってすべてえられるであろうという予想をたてていた（Kronecker 青春の夢）．世紀の変わり目に，D. Hilbert は有名なパリ講演において，20 世紀の数学者が研究目標とすべき 23 個の問題を提出したが，その 12 番目の問題とし

て，一般の代数体上のアーベル拡大を具体的な関数の特殊値によって構成することを問題としたのであった．

Kronecker の青春の夢の証明は 1920 年代に高木・Artin の類体論の結果によって完成された．現代的にいえば，その内容は次のように理解することができる（[Sh3] 参照）．上半平面 $\mathcal{H}$ の点 z に対応する楕円曲線

$$E = E_z = \boldsymbol{C}/L, \quad L = \boldsymbol{Z}z + \boldsymbol{Z}$$

の自己準同型環 End(E) が $\boldsymbol{Z}$ より大きいとき，E は "虚数乗法をもつ" といい，z を "CM-点" という．そのとき，$\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(E) = K = \boldsymbol{Q}(z)$ は虚二次体になる．(逆に任意の虚 2 次体はこの形にかける.) CM-点 z に対し，$j(z)$ は代数的になるから，ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/K)$ は $j(z) \in \boldsymbol{P}^1(\bar{\boldsymbol{Q}})$ $(\boldsymbol{Q}(z) = K)$ に，さらにそれに対応する楕円曲線 E_z の torsion（等分点の群）K/L に作用する．一方，K のイデール類群（ないしイデアル類群）も自然な仕方でこれら（ K に対応する）"特殊点" の集合に作用し，この二つの作用が類体論の準同型を通して一致する．このことから実際 $\mathrm{Gal}(K_{ab}/K)$ がこの集合に effective に作用することがわかるのである．

特に $\mathrm{End}(E) = \mathcal{O}_K, L = \mathfrak{a}$ （$\mathcal{O}_K$ のイデアル）であるとき，$\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/K)$ に関する $j(z)$ の orbit は K の類数 h_K と同じ個数の点からなる．実際，類体論の対応で $\sigma|K_{ab}\,(\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/K))$ にイデアル $\mathfrak{b}$ の類が対応するものとすれば，

$$E^\sigma \cong \boldsymbol{C}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$$

が成立する．特に，$E^\sigma \cong E \Leftrightarrow \mathfrak{b}$ 単項イデアル，である．これから $K(j(z))$ が K の絶対類体（最大非分岐アーベル拡大体）になることがわかる．さらに $K_{ab}/K(j(z))$ のガロア群が E の torsion $K/\mathfrak{a}$ に effective に作用することから，K_{ab} は $K(j(z))$ に（ E に属する）楕円関数の等分値をつけ加えることによってえられることが結論される．

Hilbert の一般アーベル拡大構成の問題はその後約 30 年間ほとんど進展をみなかったが，大戦中 Weil によって確立された抽象的代数幾何学，特にアーベル多様体の理論，(戦後の）志村五郎による代数多様体還元の理論等を基礎として大きな発展をとげた．すなわち 1955 年東京・日光で開かれた代数的整数論の国際会議において志村・谷山・Weil の三者がそれぞれの立場から虚数乗法論のアーベル多様体への拡張を論じたのであった．この高次元虚数乗法論は，以後（谷山の死後）主として志村によって完成された ([S-T], [Sh3], 虚数乗法の歴史に関しては，前者の第 1 章参照）．

志村はまた 1960 年代に，数論的商空間として生じる代数多様体に対して，その上のアーベル多様体の族を使う方法によって，ある代数体上定義される標準的モデルを構成した ([Sh1],[Sh2],[Sh3])．これは多変数モジュラー関数の特殊値による

アーベル拡大の構成，相互法則の具体的記述等を含む壮麗な理論である．これらの結果によって，上に述べた古典的虚数乗法論の幾何学的構図が高次元の場合にも拡張されることとなった．最も標準的な場合についていえば，古典的場合の $E, \mathcal{H}, \Gamma$ をそれぞれ n 次元（主）偏極アーベル多様体，ジーゲル上半空間 $\mathcal{H}_n$，ジーゲルモジュラー群 Γ_n で置き換えたとき，上述と類似の結果が得られるのである．(勿論，高次元特有の現象もあり，古典的場合のように単純ではない.)

この標準モデルの理論はその後 Deligne ([D1],[D2]), Langlands, Milne ([Mil2], [Mil3]) 等によって理解が深められ，現在では**志村多様体**と呼ばれて数論的代数幾何学の最も重要な研究対称の一つになっている（たとえば，[C-M], [L-R]）．特にその Hasse-Weil ゼータ関数を決定することは Langlands 予想とも関連し（難問ではあるが）非常に興味ある問題である．これに関しては，Eichler, 志村 (1958) の先駆的仕事, Langlands (1976) の一般的計画の提議等があり，現在 Milne, Kottwitz 等により活発な研究が進められている（[Sh3], [L], [Ko2], [Cl] 参照）．数論的商空間が偏極アーベル多様体のモジュライ空間にならない場合にも標準モデルの存在は Kazhdan, Borovoi, Milne [Mil1] 等によって証明されている．

参考文献

[A-M-R-T] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y.-S. Tai, Smooth Compactification of Locally Symmetric Spaces, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.

[B-B] W. L. Baily, Jr. and A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. **84** (1966), 442-528.

[B1] A. Borel, Groupes linéaire algébriques, Ann. of Math. **64** (1956), 20-82.

[B2] —, Linear Algebraic Groups (2-nd ed.), Springer-Verlag, 1991.

[B-C] A. Borel and W. Casselman (eds.), Automorphic Forms, Representations, and L-functions" (Corvallis, 1977), Proc. Symp. in Pure Math., **33** (2 vol.), A.M.S., Providence, 1979.

[B-H] A. Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. of Math. **75** (1962), 485-535.

[ECa] E. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1935), 116-162.

[HCa] H. Cartan, Fonctions Automorphes (2 vol.), Sém. H. Cartan 1957/58, E.N.S., Paris.

[Ch1] C. Chevalley, La théorie du corps de classes, Ann. of Math. **41** (1940), 394-418.

[Ch2] —, Theory of Lie Groups, Princeton Univ. Press, 1946.

[Ch3] —, Sur la classification des groupes de Lie algébriques (2 vol.), Sém. Chevalley 1956/58, E.N.S., Paris.

[Cl] L. Clozel, Nombre de points des variétés de Shimura sur un corps fini, d'après R. Kottwitz, Sém. Bourbaki, 1992/93, n^o 766, Astérisque **216**, 1993.

[C-M] L. Clozel and J. S. Milne (eds.), Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions (Ann Arbor, 1988) (2 vol.), Perspectives in Math., **10-11**, Acad. Press, 1990.

[D1] P. Deligne, Travaux de Shimura, Sém. Bourbaki 1970/71, n^o 389, Lect. Notes in Math., **244**, Springer-Verlag, 1971.

[D2] —, Variétés de Shimura: Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, in [B-C], Part 2, pp. 247-290.
[Ih] Y. Ihara, Hecke polynomials as congruence ζ functions in elliptic modular case, Ann. of Math. **85** (1967), 267-295.
[Iw] K. Iwasawa, Letter to J. Dieudonné (April 8, 1952), in "Zeta Functions in Geometry" (ed. Kurokawa-Sunada), Adv. St. in Pure Math., **21**, 1992, pp. 445-450.
[J] H. Jacquet, Automorphic Forms on GL(2), Part II, Lect. Notes in Math., **278**, Springer-Verlag, 1972.
[J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic Forms on $GL(2)$, Lect. Notes in Math., **114**, Springer-Verlag, 1970.
[Ko1] R. Kottwitz, Tamagawa numbers, Ann. of Math. **127** (1988), 629-646.
[Ko2] —, Points on Shimura varieties over finite fields, J.A.M.S. **5** (1992), 373-444.
[Ku] M. Kuga, Fiber Varieties over Symmetric Space whose Fibers are Abelian Varities (2 vol.), Lect. Notes, Univ. Chicago, 1963-64.
[K-S] M. Kuga and G. Shimura, On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties, Ann. of Math. **82** (1965), 478-539.
[L] R. P. Langlands, Some contemporary problems with origins in the Jungendtraum, in "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems" (Dekalb, 1974, ed. F.E. Browder), Proc. Symp. in Pure Math., **28**, A.M.S., 1976, pp. 401-418.
[L-R] R. P. Langlands and D. Ramakrishnan (eds.), The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces, Les Publ. CRM, Motréal, 1992.
[Ma] G. A. Margulis, Arithmeticity of irreducible lattices in semisimple groups of rank greater than 1, Appendix to Russian transl. of M. Ragunathan, "Discrete Subgroups of Lie Groups", Mir, Moscow, 1977; Invent. math. **76** (1984), 93-120.
[Mil1] J. S. Milne, The action of an automorphism of $\boldsymbol{C}$ on a Shimura variety and its special points, in "Arithmetic and Geometry", I, Arithmetic (ed. Artin-Tate), Progress of Math., **35**, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 239-265.
[Mil2] —, Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles, in [C-M], I, 283-414.
[Mil3] —, Shimura varieties and motives, in "Motives" (Seattle, 1991, ed. Jannsen-Kleiman-Serre), Proc. Symp. in Pure Math., **55**, Part 2, A.M.S., 1994, pp. 447-523.
[Min] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Aequivalenz,Crelles J. für d. reine u. angew. Math. **129** (1905), 220-274 (= Ges. Abh., II, pp. 53-100).
[M-T] G. D. Mostow and T. Tamagawa, On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, Ann. of Math. **76** (1962), 446-463.
[O1] T. Ono, Arithmetic of algebraic tori, Ann. of Math. **74** (1961), 101-139.
[O2] —, On the Tamagawa number of algebraic tori, Ann. of Math. **78** (1963), 47-73.
[P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebraic Groups and Number Theory (English transl.), Acad. Press, 1994.
[Sa1] I. Satake, On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups, Ann. of Math. **72** (1960), 555-580.
[Sa2] —, Classification Theory of Semi-simple Algebraic Groups, with an Appendix by M. Sugiura, Marcel Dekker, New York, 1971.
[Sh1] G. Shimura, Automorphic Functions and Number Theory, Lect. Notes in Math., **54**, Springer-Verlag, 1968.
[Sh2] —, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. **91** (1970), 144-222.
[Sh3] —, Introduction to the Arithmetic Theory of Autmorphic Functions, Publ. Math. Soc. Japan, **11**, Iwanami Shoten & Princeton Univ. Press, 1971.

[S-T] G. Shimura and Y. Taniyama, Complex Multiplication of Abelian Varieties and its Applications to Number Theory, Publ. Math. Soc. Japan, **6**, 1961.
[Si1] C. L. Siegel, Ueber die analytische Theorie der quadratischen formen, Ann. of Math. **36** (1935), 527-606 (= Ges. Abh. I, No.20); II, ibid. **37** (1936), 230-263 (= Ges. Abh. I, No.22); III, ibid. **38** (1936), 209-218 (= Ges. Abh. I, No.26).
[Si2] —, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116** (1939), 617-657 (= Ges. Abh. II, No.32).
[Si3] —, Topics in Complex Function Theory, III, Abelian Functions and Modular Functions of Several Complex Variables, Wiley-Interscience, New York, 1973.
[Sp] T. A. Springer, Linear Algebraic Groups, Progress in Math. **9**, Birkhäuser, 1981.
[Ta] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions (Thesis, Princeton, 1950), in "Algebraic Number Theory" (ed. Cassels-Fröhlich), Acad. Press, 1967, Ch XV.
[Ti] J. Tits, Classification of algebraic semisimple groups, in "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups", Proc. Symp. in Pure Math., **9**, Vol. I, A.M.S., 1966, pp. 33-62.
[W1] A. Weil, Adèles and Algebraic Groups (with Appendices by M. Demazure and by T. Ono), I.A.S., Princeton, 1961; Progress in Math., **23**, Birkhäuser, Boston, 1982.
[W2] —, Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, Acta Math. **113** (1965), 1-87 (= Oeuv. Sci., III, [1965]).
[W3] —, Ueber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **168** (1967), 149-156 (= Oeuv. Sci., III, [1967a]).
[W4] —, Basic Number Theory (3-rd ed.), Grundl. Math. Wiss., **144**, Springer-Verlag, 1974.

第19章

簡約群の表現論における幾何学的描像

堀田良之

群の表現論と幾何学の関係は，不変式論まで遡れば前世紀以前に源流をもち，今世紀前半に出版された H.Weyl の Classical Groupe ([1]) が一つの時代の要を与えている．

表題はもちろんこの流れと密接に結がっているのだが，拙文では主題をずっと狭く絞り，第2次大戦後に芽ばえた簡約群の表現論の根幹を貫く幾何学的描像について，その一片を紹介しよう．英語圏で geometric picture と呼ばれている話題である．

この流れを代表するものの一つとして誰しも思い浮べるのが Borel-Weil 型定理である．最初に発表されたのは，J.-P. Serre による 1954 年の Bourbaki セミナー ([2]) であったが，当時の言葉で言えば，連結コンパクト・リー群の (複素) 既約表現は，すべて旗多様体のある因子に伴う完備1次系 (正確には，それを与える線型空間) 上に実現される，というものである．ちょうど，層 (ベクトル束など) のコホモロジー理論が幾何学へ浸透し始めた時代であったので，旗多様体上の直線束の大域切断の空間 (0 次コホモロジー) に既約表現が現われるというこの観察は，高次のコホモロジー，ないし，ベクトル束への拡張が直ちに試みられ，R.Bott ([3]) によって十分一般的な美しい形にまとめられた．小平の消滅定理が簡潔に具現化している例としても注目を浴びたものと思われる．

Borel-Weil 型実現は，その後 1965 年頃得られた Atiyah と Bott の Lefschetz 型固定点定理を適用すれば (消滅定理と合せると) コンパクト群についての Weyl の指標公式が導かれることになり，位相・代数幾何学的見地からの美意識をいたく満足させることになった．既約表現の実現とその指標が同時に得られるということは，その群の表現論の根本を支配することであるから，少なくともコンパクト群に対する幾何学的描像は明解な形で提示されたわけである．

ところで一般の簡約群 (reductive group, 半単純群を含む) の表現論は，第2次大戦前後からすでに無限次元表現の研究が本流になっており，“幾何学的” という見地に囚われることなく，各国で急激な進展が見られていた．米国においてそれを

代表する者は Harish-Chandra であり，ソ連邦においては I.M. Gelfand の学派であった．さらに，フランスの R. Godement らの影響もあって，1950 年代あたりから保型関数論との関連も強い興味を持たれるようになっていた．

非コンパクト簡約リー群に対して Borel-Weil 型実現を得るにはどうすべきか，という問題に当然誰しも魅せられるわけであるが，1965 年の Boulder シンポジウムにおける R.P. Langlands の発言 ([4] p.256) を機に，離散系列の表現はやはり (開) 旗多様体のコホモロジーで得られるだろうという予想に定式化された．基礎の多様体がコンパクトでないからコホモロジーも 2 乗可積分な de Rham 式コホモロジーで考える．

すでに Harish-Chandra によって，離散系列の表現の分類と指標の部分的決定が，深遠かつ膨大な理論として得られていた．彼自身はいま話題にしているような実現法には殆んど興味を見せていなかったと言ってよいと思うが，数人の若手数学者によってこの予想に対する執拗な攻撃がなされた．その先頭を切ったのが岡本清郷であり，1970 年プリンストンに滞在中，M.S.Narasimhan と共に，エルミート対称空間の場合大部分のクラスの表現についてこの問題を解決した ([5])．殆んど間髪をおかず，W.Schnoid が一般の場合 (すべての表現に対してではないが) かなり異なった方法で Langlands が提案した形を解決し一応の決着を見た ([6])．

完全な形での解決にはあと数年を要したのであるが，それを別にしてもこの非コンパクト群に対する Borel-Weil 型実現には不満なものがあった．コンパクト群の場合のように指標の理論を明示することが出来ないのである．

群の表現論の基本問題は，既約表現の分類とその指標 (既約指標) の決定である．この二つの足場が堅牢であれば大方の応用に堪えられる．上に述べたような既約表現の実現が，最も理想的 (約束の地) ならば，実現そのものが明確な分類を与え，かつ実現から跡公式 (固定点定理のような) によって指標が記述できる場合であろう．コンパクト・リー群に対する Borel-Weil 定理はそのようなものであったゆえ，人々はその拡張を追い求めた．しかし，非コンパクト群の場合それは指標の理論まで支配するには至らなかったのである．

有限群の場合，衆知のように (複素) 既約表現の同値類と共役類の個数は相等しい．これは一つ一つの共役類と一つ一つの既約表現が自然に対応しているのではなく，指標が共役類上の特別な関数になっており，それらのなす空間の基底を与えているという，双対性から導かれた事実である．群がリー群や代数群のように幾何学的なものならば，その共役類は非常に豊かな幾何学的構造を (隠し) 持っている．例えば，一般線型群 GL_n を思い浮べるだけでもよい．巾単共役類である Jordan 標準形のもつ (代数) 幾何学的構造は，なかなか奥の深いものである．

そこでいま，表現論を考えようとしている群自身ではなく，その双対的対象である既約表現の全体を一般には別の群ないし群的な構造をもつものの共役類 (のよう

なもの) と自然に対応させることが出来て，かつ指標の理論が構築できることになればこれほど理想的なことはない．実際アーベル群の場合，既約指標全体が再び群をなし (共役類は自明につぶれて) 簡単な結果を与えている (Pontryagin 双対性).

巾零リー群に対しては，A.A.Kirillov がすでに 1962 年にリー環の双対空間の随伴軌道によって既約表現を分類し，しかも軌道積分によって指標の構成を行っており ([7])，コンパクト群に対する Borel-Weil 実現もそのような解釈が可能である (旗多様体は半単純正則軌道である) ので，この方法をいろいろな群に拡げることは大いに期待され種々の試みが行われた．

この描像は一般に軌道法と呼ばれ，さまざまな姿をとって表現論に現われ (あるいは隠れ) ている．もちろん，巾零・可解やコンパクト群以外になると，軌道法も単純な形で全てを統制するわけではなく，理論の各層に様々な姿をとって出現している，と観察される．簡約群の場合，これらを統一的に捉えようという試みは，もちろん多くの人々によって行われており，例えば Langlands の双対群という構成は代表的なものである．双対群は代数群の定義体 (または環) にも強く依存するいわば "数論的な" 対象であり，保型関数論の表現論的理論に動機をもっている．

この描像が最も成功しているのが G.Lusztig による有限簡約群の理論である．この構成をしばらく跡付けてみよう．Lusztig は，1975 年 P.Deligne との共著 ([8]) で劇的な登場を果したのだが，この仕事はエタールコホモロジーを用いて有限体上の簡約群の Borel-Weil 型実現を展開したものである．有限体上の簡約群は有限群であるが，連結コンパクト・リー群の表現論とは異なり，むしろ連結非コンパクト簡約リー群の表現論と似た構造をもつ (種々の系列をもつなど)．そのせいもあってか，1955 年の J.A.Green による一般線型群の理論 ([9]) 以後殆ど進展は見られなかったのだが，この間発達した A.Grothendieck の位相代数幾何学の成果の一部の援用もあって，急展開を見せることになったのである．Deligne-Lusztig は，旗多様体のある部分多様体上の l 進局所係数 (直線束にあたる) のコホモロジー上に有限群の既約表現が大量に得られることを示し，しかも，この場合 Lefshetz 型固定点定理があるのでかなりの部分 (正則半単純元) に対して指標まで明示することが出来た．

しかし，非コンパクト簡約リー群の場合と同様，この切り込み方で大体の決着がついたわけではなく，この事件は Lusztig による以後の長い膨大な理論の始まりにすぎなかったのである．Deligne-Lusztig のコホモロジー構成の部分表現としてすべての既約表現が得られることは分かっていたので，問題はこれらの表現が既約でないときの分解を一定の手続きで行えればよいことになる (分類)．一番のポイントは巾単表現の概念であろう．

代数群の元は Jordan 分解によって，半単純元と巾単元の可換な積に一意的に表示でき，従って共役類もその構造を反映している．先に触れた意味で既約表現に対

応する"双対群"があるのならば，その共役類の半単純部分と巾単部分が表現の特質に重大に影響しているはずであり，しかも Jordan 分解と同様巾単部分の寄与が決定的であろう，という推察が成り立つ．実際，有限簡約群の場合この描像が精確にフォローされ理論が完成することになる (1984[10])．この基本定理をちゃんと記すと，その単純さと難解さの両面を表わしているので述べてみよう．

有限体上定義された簡約群 G に対して，通常の意味の (Grothendieck-Demazure; 極大トーラスの指標群を極大トーラスにし，余ルート系をルート系にする) 双対群 G^*_s が定義される．G^*_s を G^* の半単純元のなす部分集合とすると，半単純元 $\theta \in (G^*_s)^F$ (上つき F は Frobenius 準同型による固定点，すなわち基礎有限体上の有理点のなす集合) の類に対して，半単純既約表現 χ_θ が定まる．$\theta \in G^*_s$ の G^* における中心化群 $Z_\theta(G^*)$ は再び簡約群であり，その双対群 $(Z_\theta(G^*)^*)^F$ の巾単表現のなす類を $(Z_\theta\widehat{(G^*)}^*)^F_u$ と書いておくと，結局有限群 G^F の既約表現の類は集合

$$\coprod_{\theta \in (G^*_s)^F/\sim} (Z_\theta\widehat{(G^*)}^*)^F_u$$

によって自然に分類できる，というのが Lusztig の理論である．$(Z_\theta(G^*)^*)^F$ の巾単表現 ν に対して，G^F の既約表現 $\chi_\theta \star \nu$ が定まって，これがいわば既約表現の "Jordan 分解" に当っているのである．

ちなみに，$G = GL_n$ の場合は，すべてに簡単な同一視が出来て ($G^* = GL_n$)，分類集合が結局双対群の共役類 $(G^*)^F/\sim$ となっているのが Green の定理であった．

次に既約指標の決定であるが，Lusztig はこのために "指標層" の概念を提出した．これは群上の同変単純偏屈層 (perverse sheaf) とも言うべきもので，元来指標は群上の不変 (同変) 関数の特殊なものであるという観点を精巧に幾何学化したものである．この発想は，Springer 表現を通して更に実リー群の場合の Harish-Chandra の指標理論，すなわち不変固有超関数を与える微分方程式系の解析から本質的な結果を得ているという歴史から得られたものである．

1970 年代，佐藤学派とくに柏原正樹氏によって得られたホロノミー D 加群と偏屈層の対応 (Riemann-Hilbert 対応) に照らして，Harish-Chandra の微分方程式から得られる偏屈層が指標のいかなる性質を反映しているか，という問題は興味深く，筆者らのものも込めていくつかの研究があった．有限体上の場合，微分方程式は存在しないが，対応する偏屈層は存在しており，これが指標を導出する源であることを示したのが Lusztig の指標層である．指標層の有理点における Frobenius 写像のトレースが "大体" 指標を与え，そうでないとしてもそのズレが決定できるというのである ([11])．この理論では，元々保型関数論に発し，実リー群の離散系列の理論にも深い影響を与えたカスプ (尖点) 表現の思想がやはり一つのキー・ポイントになっている (カスプ層！)．

以上のように，有限体上の群の表現論は有限群ではあっても，その連続性を手

掛りにするには代数幾何の十分な発展を待たねばならなかったが，1975 年に一旦堰が切れると怒濤の如き流れを迎えて 10 数年のうちにほぼ完成を見た．有限体上の表現論で育まれ養われた Springer 表現や巾単表現の発想は，また逆に実リー群のユニタリ表現論の未解決部分に重要なアイデアを与えた．A.Joseph, M.Duflo, W.Borho, J.C.Jantzen らによる原始イデアルの理論や，それと指標の関連を掘り下げた D.Vogan らの試みがその一端である．

これらの実 (または複素) 簡約群の表現論において，1980 年前後のイベント，Kazhdan-Lusztig 予想とその解決は時代のもう一つの幕開けを告げている ([12], [13],[14])．先に述べた偏屈層 (交叉ホモロジー理論を含む) の表現論への明らさまな登場は，この時が初めてであり，専門家達にも相当の衝撃を与えた．この理論はさらに無限次元リー環やモジュラー表現においても最近重大な進展が見られているが，多くの解説記事もあるのでここではこれ以上触れない．ただ，基本的な誘導表現 (Verma 加群) の分解が，Schubert 多様体の特異点の特質を直接反映しているという，誠に幾何学的な結論になっていることを記しておく．

歴史的順序は逆になったが，以上の理論を支えている技術的なハード部分の本質をなすいくつかの (代数) 幾何学的事実の中で最も有名なものは，B.Kostant の巾零多様体の正規性定理である．1963 年に発表されたものであるが，リー環の不変式に伴う可換環論的定理として，当時としては相当難解な証明を必要としている ([15])．この帰結として，半単純リー環の正則元の軌道の閉包が正規多様体であることが導かれる．標語的に短絡化して言えば，表現の双対である軌道の代数幾何的性質が非常に良い (正規) ものであり，したがって表現論の展開に十分期待がもてる，という光明をもたらしたと言ってよい．例えば，ずっと後になって先程述べた Kazhdan-Lusztig 予想の解決の第一段階の重要な定理の裏づけを与えてもいる (局所化定理)．実簡約群の表現論そのものの 1950 年代から約 30 年間の牽引車は，米国においては殆んど Harish-Chandra 一人と言っても良いかと思うが，彼は幾何学的言明に拘わらず，場合によっては好まなかった様子すら見られる．時には，正確さを期する余り，あえて彼一流の晦渋な表現を通している．しかしながら，あるいは当然のことながら，ある種の解析，特に指標の理論を不変微分方程式論の解析に帰する部分では，種々のキー・ポイントがリー群・リー環の軌道の幾何学的特徴，特に，特異性に関連付けられており，上記の Kostant の定理やその類似がその役割の中心を担っているのが読みとれる．有名な指標の正則性定理などがその代表である ([16])．今から思えば，ホロノミー系の特性多様体の特異性を十分精密に研究していたのであった．

以上の他にも “幾何学的観点” をもつ表現論の話題は山ほどあると思うが，それについては又の機会，または又の方々に譲ることにしてこの拙文を閉じる．

引用文献

[1] H.Weyl : The Classical Groups,Princeton Univ.Press,1939.
[2] J.-P.Serre : Représentations linéaires et espaces homogènes Kählérians des groupes de Lie compacts, Exp.100, Sém. Bourbaki, 6^e année 1953/54.
[3] R.Bott : Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 66(1957), 203-248.
[4] Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Sympo. Pure Math.Vol IX,AMS,1966.
[5] M.S.Narasimhan and K.Okamoto : An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. of Math. 91(1970), 486-511.
[6] W.Schmid : On a conjecture of Langlands, Ann. of Math. 93(1971), 1-42.
[7] A.A.Kirillov : Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspehi Mat. Nauk 17(1962), 57-110.
[8] P.Deligne and G.Lusztig : Representations of reductive groups over finite fields, Ann.of Math. 103(1976), 103-161.
[9] J.A.Green : The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 80(1955), 402-447.
[10] G.Lusztig : Characters of reductive groups over a finite field, Ann. of Math. Study, Princeton Univ. Press, 1984.
[11] G.Lusztig : Character sheaves, I-V,Adv. in Math. 56(1985), 193-237; 57(1985), 226-265 ; 57(1985), 266-315 ; 59(1986), 1-63 ; 61(1986), 103-155.
[12] D.Kazhdan and G.Lusztig : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. math. 53(1979), 165-184.
[13] A.Beilinson and J.Bernstein : Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C.R.Acad. Sci. Paris 292(1981), 15-18.
[14] J.-L.Brylinski and M.Kashiwara : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. math. 64(1981), 378-410.
[15] B.Kostant : Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. 86(1963), 327-402.
[16] Harish-Chandra : 全集, Springer-Verlag.

第20章

再評価期の確率微分方程式

山田俊雄

確率積分・確率微分方程式の理論は現在 Ito-Caculus とよばれ，物理学・数理生物学・制御理論・ファイナンス工学などで広くかつ本質的に用いられている．今日ではその理論は半マルチンゲールの微積分学として整理され，その骨格は Ito 型積分論と Ito-公式とよばれる変換公式である．この理論が伊藤清によって日本語で発表されたのは第二次大戦下の 1942 年であり，英文で本格的な形で発表されたのは 1951 年であった．理論の完成度は極めて高く，Doob, J. L. がその積分論の本質をマルチンゲール性にあると 1953 年に指摘したが，日本でも海外でもこの理論が直ちに大きな評価を受けたとは言えない．理論の誕生後約 20 年を経て，1960 年代初頭にこの理論の大きな発展が Moscow と Kiev でみられ，1960 年代後半から 1970 年代にかけて積分論がマルチンゲールの立場で日本とフランスで徹底的に再構築された．1960 年代後半には確率微分方程式の解の構成にもマルチンゲールメソッドの導入という技術革新があった．1970 年代には，もう一度伊藤清の最初の方法・立場の復権と新しく導入された諸方法・諸概念との関係の整理が行われ，ほぼ 1980 年には，確率微分方程式論の体系が完成したとみなされる．小論では主として 1960 年以降 1980 年までのこの理論の発展を論じたい．

1.　誕生期の確率微分方程式 (1942-1951)

ごく簡単にこの時代をスケッチしよう．伊藤清は 1942 年に全国紙上数学談話会誌 No.1077 に発表した論文 [10] によって確率微分方程式論の創始者と見なされている．ここで伊藤清の行ったことは，Markov 過程の微分の概念を Path に沿った遷移確率の tangent として定式化 —— 確率法則に値をもつ確率変数 —— し，時空の各点に Gauss 分布を配置したとき，それを確率微分にもつ Markov 過程を決定するという問題の解決である．ここで Brown 運動を基礎にもつ確率微分方程式が現れる．問題の解決のためには，

1. Brown 運動にもとづく確率積分の定義 (Brown 運動の path は有界変動でな

いので，Lebesgue-Stieltjes 積分では扱えないという難点がある) を行う，

2. 確率微分方程式を定義し，その解を構成する，

そして最後に，

3. 解の確率微分が最初に与えられた条件を満たすこと，

を示さなければならない．伊藤清はこれらを数学的に完全に解決し Ito 型の確率積分を定義し，萌芽形態ではあるが Ito-公式のアイデアをすでに出している．解の構成には Picard 近似を用いている．このようにして，確率微分方程式論はこのときに高い完成度をもって世に現れた．伊藤清はこの理論を Brown 運動を独立増分過程の場合に拡張するが，それが英文論文として発表されるのは 1951 年のことになる [13]．第 2 次世界大戦下の日本で 50 ページを越す英文論文を発表することは不可能であった．科学史に残るであろう業績で第二次大戦中に日本で日本語で発表されたものとして，朝永振一郎の "超多時間理論" や坂田昌一・谷川安孝の "二中間子論" が挙げられるが，これらの理論が戦後まもなく世界的に脚光を浴びたり，また激しい競争に巻き込まれるのに対して，伊藤理論はやや異なった経過をたどることになる．

さて，伊藤清と独立に確率微分方程式を研究した Gikhman, I. I の仕事 (1947-1951) に触れよう [4,5,6]．彼は Bernstein, S. N. のシンボリカルな確率微分方程式を確率差分方程式の系を考えることによって定式化し，その極限として Markov 過程を構成することに成功した．ただし，この際，確率積分を定義しているのではないので，これをもって，確率微分方程式論の伊藤清と独立な創始者とは言えないであろう．確率積分の概念のないことは，変換公式が存在しないことでもあり．構成した Markov 過程の遷移確率密度関数の従う Kolmogorov の方程式を論じるさい，伊藤清と異なった方法が必要となる．このなかで，初期値に関する解の連続性問題が詳しく分析され，それは後に確率微分方程式の解の作る Diffeomorphism の問題と関連する．

伊藤理論に戻れば，1951 年に現在 Ito-公式とよばれる，確率積分の変換公式が確立したことと [14]，独立増分の場合に一般化された論文が英文で発表されたこと [13] をもってこの理論の確立期が終わったとみなせよう．

2. (1950 年代後半 – 1960 年代初頭)

伊藤清による確率微分方程式の解の構成とその一意性の証明方法は，Picard 近似によるものである．Picard 近似による証明では近似列の解への収束の速さを評価でき，またその速さが充分に速いという特徴がある．伊藤清はこの方法に強い愛着を持っていると述べている．また Schwartz. L は最近，確率微分方程式における Picard 近似の収束の速さに注目している [28]．他方 Picard 近似の収束は

本質的に距離空間の縮小写像についての不動点定理によるが，そのためこの方法は係数の Lipshitz 条件に極めて強く束縛される．確率微分方程式の解の構成に，Cauchy-Euler 法 —— 折線近似法 —— を用いたのが，丸山儀四郎 [19] である．この近似法は近似の速さについては，直ちには明快な情報をもたらさないが，常微分方程式論からの類推をすると係数の Lipshitz 条件に束縛されない可能性を持つことを期待できる．またこの当時意識されなかったであろうが，この方法は確率微分方程式への数値解析の手法としての可能性を持つ．丸山儀四郎はおそらく，方程式の解の構成を連続係数のもとで行うことを意図していたと考えられるし，そのために確率過程の族の収束の理論の考察を行っていたようである．丸山儀四郎はこの論文では，方程式の解の存在と一意性については，伊藤清と同じ Lipshitz 条件のもとでその別証明を与えている．またこの論文では，係数変化に伴う解の変化の連続性，その際の一種の Invariance Principle, Kolomogorov-Smirnov 型の定理に対する Doob, J. L. の予想の解決など多彩な結果が論じられている．

ここで，常微分方程式論の場合を振り返っておく．連続係数のもとで Cauchy 問題の解の存在についての Peano の定理を証明するには，Cauchy-Euler 近似列を構成し，その列の連続関数の空間での Compact 性を示す必要があるが，そのときに本質的なことは，Ascoli-Arzelà の定理による連続関数のなす距離空間の Compact 性の特徴づけである．

確率微分方程式において，連続関数のもとでの解の構成には，折線近似 —— Cauchy-Euler 近似 —— 列の構成と，確率過程の族に関する Compact 性を特徴づけることが必要であろうことが，常微分方程式からの類推で理解される．この特徴づけは，Prohorov, J. V. の Poland 空間 (可分完備距離空間) 上の確率測度の鮮位相に関する相対 compact 性の Prohorov の条件による判定定理 [25] で基礎が与えられた．なおここでは Bourbaki の和訳の用語を用いたが，確率論の研究者の間では鮮位相は弱収束位相とよぶことが一般である．また Prohorov の条件は tight 性という．重要な確率過程はすべて Poland 空間上の確率測度として記述されるので，この定理の意義は極めて重要である．

Skorohod, A.V. はこの定理に基づき，ただちに確率過程の族に対する Ascoli-Arzelà 型の相対 Compact 性の特徴づけに成功した [29]．1956 年に創刊された，Theory of Probability and its applications, Vol. 1 はこれらの大論文によって飾られている．

Skorohod, A. V. は 1960 年頃に伊藤清によって確立された形での確率微分方程式の研究を始めたものと推定される．Bernstein, S. N. Gikhman, I. I. の研究の流れからみて Skorohod, A. V. が丸山儀四郎の方法に注目したことはごく自然であり，これと彼自身による結果を合わせれば，連続係数条件で確率微分方程式の解の構成は彼にとっては容易であったと考えられる [30,31].

伊藤清による Lipshitz 条件下での解と，Skorohod, A. V. による解の構成には，本質的な差があることに注意しよう．伊藤清の場合，解は与えられた確率空間とその上に定義された，Brown 運動の汎関数になっている．そのことは，解の構成法から直接に理解される．これに対して，Skorohod, A. V. の解の構成では，解は一般には，最初に与えられた確率空間上の Brown 運動 (もっと一般には確率連続な独立増分過程) の汎函数とはなっていないで，適当な確率空間上に定義される．これらの解をおのおの確率微分方程式の “強い解” と “弱い解” とよんでいる．後に述べるが，強い解の存在しない方程式もある．Skorohod, A. V. の仕事のもう一つの意義は，確率微分方程式の解の存在と一意性の分離である．解の一意性の成り立たない例が 1962 年に，Girsanov, I. V. [8] によって指摘される．このようにして，伊藤理論誕生後の最初の決定的な進歩は，Moskow と Kiev で達成された．通常 Girsanov [7] の名前で呼ばれる “ずれの変換” は Cameron-Martin，丸山儀四郎 [18] などの先駆者の研究をその前史にもつが，この時期の大きな収穫のひとつである．

この頃 —— 丸山儀四郎の仕事以降，Skorohod 理論の完成の時期 —— の日本の確率論研究者，特にその若手の研究活動は伊藤・丸山理論とどのように関連していたであろうか．当時，伊藤清の関心は 1 次元拡散過程の構成にあり，その研究には，確率微分方程式は係数に関する制約のため役割を演じることはなかった．1 次元拡散過程における Ito-Mckean の理論の成功は当時の日本の若い世代の確率論研究者に多大の感銘を与え，また Dynkin, E. B. 学派の影響もあり，多くの優れた人材が多次元拡散過程の研究に没頭していた．ここでは，確率微分方程式論もその研究の手段としては役割を演じたが，総じてみれば，解析的手段の補完的なものであった．いずれにしても確率微分方程式それ自体を研究対象とすることはなかった．1950 年代後半，京都大学で伊藤清は確率微分方程式を講義のテーマとしたことはなく，それについて院生と語ることも少なかったという．

3. 確率積分の歴史

ここで確率積分の概念の発展をみておこう．被積分関数 (Integrand) が決定論 (determisistic) の場合の Brown 運動による積分は，Wiener によって 1923 年に提案され，Wiener 積分とよばれている．

確率過程を Integrand とする Brown 運動を基礎とする積分 (これを Brown 運動を Integrator とするという) は伊藤清によって 1940 年代初頭に定義された [10,11,12].

Brown 運動はその path が有界変動ではないため，積分を Lebesgue-Stieltjes 式には定義できない．伊藤清の確率積分の定義には Integrand の確率過程を Brown 運動

に関して可測なものに制限し積分を Riemann 和の近似として考えるさい Integrand の値を分割の各小区間の左端で与えることで実行された．Brown 運動の二乗変動和を 0 と t の間でとると t に等しくなること，Brown 運動の独立増分性がそのことを可能にした．当時は意識されなかったことであるが，Martingale 性が定義の成功の鍵であった．この積分は独立増分過程の場合にまで Integrator のクラスを拡張され，Doob, J. L. の紹介で 1951 年にアメリカ数学会の雑誌 Mem. AMS に発表される (前述の論文 [13])．Martingale 理論の確立者である Doob, J. L. はこの確率積分の Martingale 性を指摘し，1953 年に出版された重要な著書 [3] のなかで，Martingale を Integrator とする確率積分理論を展開する．Doob, J. L. は このとき L^2 Martingale を Integrator とする理論を目指していたと想像される．この構想を実現するのは，Martingale 理論の面での飛躍が必要であった．1962 年に発表された Meyer, P. A. の Super-martingale の分解定理 [21,22] がそれであった．この Super-martingale をある種の一様可積分性の条件下で Martingale と増加過程の差に分解する定理は，Doob, J. L. が離散パラメタの場合に示したもので，連続時間の場合に証明することを彼の学生に誰彼なしに勧めていたものだと，Meyer, P. A. は述べている．Meyer, P. A. は 1961 年に Markov 過程の Excessive functional の表現定理に決定的解決をもたらすが，そのとき用いた，L^1 空間の弱収束の特徴づけと Laplacian の近似が Doob の conjecture の解決に役立つことに気がついたのは，その 1 年後であったと回想している．この分解定理は Doob-Meyer の定理と現在よばれている．この分解定理は L^2 Martingale の二乗を Martingale と増加過程の差に分解することを導き，これから確率積分の定義が可能になる．Courrege, P. および Meyer, P. A. による先駆的な試み，本尾実・渡辺信三による Markov 過程の枠組みでの確率積分の定義を経て，1967 年に国田寛・渡辺信三は L^2 Martingale を integrator とする確率積分の構成に成功する [17]．これに続いて，Meyer, P. A., Dellacherie, C., Dolean-Dade, C. などを中心とする Strasbourg 学派は局所 Martingale を Integrator とする確率積分の構成を行う [1,2]．

Path が連続な局所 Martingale についてはその局所化して得られる martingale を L^2 にとれるため国田・渡辺の理論で扱えるが，path 不連続の局所 martingale は局所化によっても一般には L^2 の枠に納まらない．この点をどう突破するかが Strasbourg 学派の課題であった．この学派の理論は可測性に関するきわめて精緻な研究に特徴づけられていて，一見スコラ哲学風の理論に見え，我が国にも風巻紀彦・関口健を中心とするグループのようにこの理論の発展に深く関わった研究者達が存在するとはいえ，日本では一般には敬遠されがちである．しかし Strasbourg 学派の理論は，Filtering 理論，ファイナンス工学の基礎などに極めて大きな貢献をしていることからも空理空論では決してない．

さて，ここまでくれば Semi-martingale すなわち局所 Martingale と増加過程

の和として与えられる確率過程を Integrator とする確率積分の構成は容易である．1974-75 年頃に Strasbourg 学派の積分論は確立する．1970 年代の終わりに Dellacherie, C., Bichtler などによって，Integrand になる確率過程の族に関する積分のある種の連続性を仮定すれば，Integrator は semi-martingale であることが示された．これは semi-martingale を integrator とする確率積分の理論の高い完成度を表現している．Semi-martingale の概念が自然であることは，それが定義されている確率空間の確率測度をその測度に絶対連続なものに置き換えても Semi-martingale 性が保たれることからもわかる．これに対して Martingale 性はこのような測度の変換に対して，不変な概念ではない．Strasbourg 学派の理論についてはは [1,2,27] を参照していただきたい．

ここで，確率積分の変換公式 —— Ito-公式とか，Chain rule とよばれる —— について触れよう．伊藤清がこの公式を明確に定式化したのは，1951 年の論文 [14] においてである．この公式は確率微分方程式の解の遷移確率密度関数が満たす Kolmogorov の方程式を導くための鍵になるレンマで 1942 年の論文ではその萌芽の形で現れていたものである．伊藤清はこの明確な定式化を Lie 群上の確率微分方程式の研究の副産物として得たと述べている．さて，確率積分の発展の歴史は Ito-公式の拡張の過程でもある．

国田・渡辺理論では L^2 Martingale を Integrator とする確率積分に関する Ito-公式が定式化され，その応用として，加法過程の分解定理 (Lévy-Ito) が簡潔に証明される．

ここで，Tanaka-公式について，触れよう．これは Ito 公式の適用される関数のクラスを拡張する最初の試みであり，Local-time の新しい表現もしくは定義を与える公式である．田中洋は McKean, H. P. と 1960 年代初頭に Markov 過程の Additive functional の表現を論じているときにこの発想を得たとのことである．Ito-公式は semi-martingale を Integrator とする確率積分の場合に Strasbourg 学派によって拡張され，Semi-martingale の Local-time の定義は Tanaka-公式を用いて与えられる [2].

最後に Stratonovich 積分について述べておく．Ito 型の確率積分は分割の各小区間の左端での Integrand の値とその区間での Integrator の差の積を加えたものの極限として定義されたが，これを Riemann 積分の定義の場合のように，左端に限らない形で考えようとするのはごく自然な発想で，1960 年代に Fisk, D. L., Wong, E. - Zakai, M., McShane, E. J. などの試みである．それらの中で，Stratonovich, R. L. [32] の積分が数理工学者に与えた影響は大きいものがあった．Stratonovich 積分は小区間の両端での Integrand の値の平均を用いるものである．当然 Martingale 性はなくなり，Integrand にとれる確率過程に制限を強く受け，Semi-martingale に限られてしまう．しかし応用面で数学モデルを作るとき，Ito 型

積分より Stratonovich 型のほうがより合理的と考えられる場面もしばしば生じる．伊藤清は 1970 年頃応用数学者から Stratonovich 積分を聞いたとき，この積分を受け入れるのに，そのあまりにも，テクニカルな性格のために抵抗を感じたと述べている．しかし Stratonovich 積分はその変換公式が通常の微積分の合成関数の微分と形を同じにするという利点をもち，Manifold 上の確率微分方程式を扱うのにきわめて適切である．このことを Strook, D. W. の球面上の Brown 運動の構成の仕事を通じて理解した伊藤清はやがて，Martingale 積分の枠組みで Stratonovich 積分と Ito 積分の関係を明快にし，きわめて美しい Ito の丸演算法を提案する [15].

4.　60 年代後半から 70 年代の確率微分方程式の基礎理論

1969 年に発表された Strook, D. W. と Varadhan, S. R. S. の確率微分方程式の弱い解の存在の特徴づけを Martingale Method で行うというアイデアは，確率解析の研究に画期的な技術革新をもたらした [33,34]．確率微分方程式にともなう二階偏微分作用素を施された関数の中に確率過程をいれてできる過程を局所 Martingale にする確率測度を連続関数の空間上に作ることができることと，方程式の弱い解の存在が同値である，という内容である．この定式化はいくつかの利点をもたらす．確率測度の Poland 空間上で考えるため，測度の弱収束 (鮮収束) に関する理論，Regular Conditional probability の理論，局所化のテクニックなどが自由に使える点である．Skorohod, A. V. による連続係数の場合の解の存在定理の証明も見通しのよいものになる．Regular conditional probability の理論により係数が時間的に一様のときの強 Markov 性を，すべての出発点に関してただ一つの martingale-problem の解をもつときに示すことができる．Strook-Varadhan による，拡散係数が時間的に一様で連続かつ一様楕円型の場合に解の一意性 (弱い意味での) が成り立つ，ことの証明はこの方法の有効性を強く印象づけた．このようにして，Martingale problem の定式化はブームを巻き起こした．Varadhan, S. R. S. は 1994 年 AMS の Birkoff 賞を受けるがその理由の主要な部分にこの Martingale Problem method が挙げられている．

1969 年に McKean, H. P. Jr. によるきわめて具体性に富み刺激的な確率積分のテキスト [20] が出版されたことは忘れてはならない．この本は伊藤清の強い解の立場に立つものである．

さてこのようにして，確率微分方程式の解の存在と一意性について，それぞれ強い意味，弱い意味の区別が次第に明確になり，解の存在と一意性の分離する場合が次第に研究者の先鋭な関心を集める時期になった．McKean のテキストは前述した Girsanov による解の一意性の壊れる Case の再評価を通じてこの機運の醸成

に貢献し Martingale problem method が一世を風靡するなかで Ito の方法の重要さをアッピールしていたといえる.

確率微分方程式の解，一意性の諸概念が錯綜した状態であった 70 年代初頭，これらを分析整理し相互の関連を明確にすることは，必要で重要なことであった．また一意性が成立する限界 (主として係数に関する連続性条件で与えられる) を考察することも自然であった．この課題に，決定的な貢献をしたのは，日本の確率研究者達で田中洋，渡辺信三，西尾真喜子，中尾慎太郎などの名前を挙げることができよう.

一意性については，分布の意味の一意性と，道ごとの一意性として整理され，田中洋によって，“弱い解が存在し分布の一意性が成立するが，道ごとの一意性は成立しない例” が示される．ついで，“弱い解の存在 + 道ごとの一意性，は強い解の存在と同じ” そしてこれより “道ごとの一意性は分布の一意性を導く” が示され諸概念間の関係が整理された [35]．一意性問題では，1 次元確率微分方程式の道ごとの一意性について [23,24,35] において決定的な結果が得られた．これらの一意性条件は Bessel 過程の理論や Skew Symmetric な Brown 運動の取り扱いをきわめて明快なものにした．当時は予想しなかったことであるが，木村資生の中立モデルの数学的基礎づけに現れる SDE やファイナンス工学の CIR モデルに現れる確率微分方程式の一意性もこのときに得られた結果で保障される．解の分布についてのみ関心を持つ解析的立場からは，強い解や道ごとの一意性について調べることはさして意味のないことであるが，Path の性質についてより詳しいことを研究する立場や解が与えられた Brown 運動の Functional (より詳しくは anticipate な) になっていることを知りたい場合には，道ごとの一意性概念が不可欠である．この立場で二つの確率微分方程式の解の比較定理がこの時期に完成した．この定理は 1961 年にすでに Skorohod によって解の一意性との関連で論じられたが [31]，Anderson, J. の別証明を経て [36] において拡張，証明の明快化がなされ，その本格的な応用が Optimal control problem や拡散過程の解の爆発問題について，池田信行・渡辺信三 [9] によって示された．Malliavin, P. もこの問題に関心を寄せている.

この日本学派の諸結果は伊藤清の方法の復権でもあったといえよう．続いて，主としてフランスとソ連および英国で日本学派の仕事に関連した研究が大量に現れる．Krylov, N. V., Zvonkin, A. K., Veretennikov, A. Y., Barlow, M., Perkins, E., Le Gall, J. F., Yor, M., Chitashvili, R. J., Toronjadze, T. A., などの名前を挙げておく.

基礎理論については，この他，解の作る Diffeomorhism，解の近似問題などが挙げられる [9]．詳しく論じることは避けるが，これらの諸問題を含めて，確率微分方程式論の体系は 1980 年にはほぼ完成したと結論される．1970 年代末から，この分野の専門書が続々と公刊 [9,16,26,27,34] されることも理論の成熟度を示してい

る．1981-1982 年の Bourbaki セミナーも確率微分方程式をそのテーマに取り上げ Yor, M. が総合報告を行っている [37].

文献表

[1] Dellacherie,C., et Meyer, P. A., "Probabilités et Potentiel Chap I-IV," Hermann, Paris, 1975.

[2] Dellacherie,C., et Meyer, P. A., "Probabilités et Potentiel Chap. V-VIII Théorie des martingales," Hermann, Paris, 1980.

[3] Doob,J.L., "Stochastic Processes," J. Wiley and Sons, New York, 1953.

[4] Gikhman,I.I., *A method of constructing random processes (in Russian),* Doklady Akad. Nauk. SSSR **58** (1947), 961-964.

[5] Gikhmann,I.I., *On the theory of differential equations of random processes,* Ukrain. Mat. Z. **2 no.4** (1950), 37-63.

[6] Gikhmann,I.I., *On the theory of differential equations of random processes II (in Russian),* ibid. **3** (1951), 317-339.

[7] Girsanov,I.V., *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitutions of measures,* Theory Prob. Appl. **5** (1960), 285-301.

[8] Girsanov,I.V., *An example of non-uniqueness of the solution to the stochastic differential equation of K. Ito,* ibid. **7** (1962), 325-331.

[9] Ikeda,N., and Watanabe,S, "Stochastic differential equations and Diffusion processes," North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, 1981.

[10] Ito,K., *Differential equations determining Markov Processes (in Japanese),* Zenkoku Shijo Sugaku Danwakaishi **1077** (1942), 1352-1400.

[11] Ito, K., *Stochastic Integral,* Proc. Imperial Acad. Tokyo **20** (1940), 519-524.

[12] Ito,K., *On a stochastic integral equation,* ibid. **22** (1946), 32-35.

[13] Ito,K., *On stochastic differential equations,* Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1951), 1-51.

[14] Ito,K., *On a fomula concerning stochastic differentials,* Nagoya Math. J. **3** (1951), 55-65.

[15] Ito,K., *Stochastic differentials,* Appl. Math. Opt. **1** (1974), 374-381.

[16] Karatzas,I., and Shreve,S.E., "Brownian motion and Stochastic Calculus," Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[17] Kunita,H., and Watanabe,S., *On square-integrable martingales,* Nagoya Math. J. **30** (1967), 209-245.

[18] Maruyama,G., *On the transition probability functions of Markov process,* Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **5** (1954), 10-20.

[19] Maruyama,G., *Continuous Markov processes and stochastic equations,* Rend. Circ. Matem. Palermo **4**, 48-90.

[20] McKean,H.P.Jr., "Stochastic Integrals," Academic Press, New York, 1969.

[21] Meyer,P.A., *A decomposition theorem for supermartingales,* Illinois J. Math. **6** (1962), 193-205.

[22] Meyer,P.A., *Decomposition of supermartingales : the uniqueness theorem,* ibid. **7** (1963), 1-17.

[23] Nakao,S., *On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations,* Osaka J. Math. **9** (1972), 513-518.

[24] Nisio,M., *On the existence of solution of stochastic differential equations,* Osaka. J. Math. **10** (1973), 185-208.

[25] Prokhorov,Y.V., *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory,* Theory Prob. Appl. **1** (1956), 157-214.

[26] Revuz,D., and Yor,M., "Continuous Martingales and Brownian motion," Springer-Verlag, Berlin New York, 1991.
[27] Rogers,L.C.G., and Williams,D., "Diffusions, Markov Processes, and Martingales. vol 2 : Ito Calculus," J. Wiley and Sons, Chichester New York, 1987.
[28] Schwartz,L., *La convergence de la série de Picard puor les é.d.s.,* Séminaire de Probabilités **23** (1989), 343-354.
[29] Skorohod,A.V., *limit theorems for stochastic processes,* Theory Prob. Appl. **1**(1956), 260-291.
[30] Skorohod,A.V., *Existence and uniqueness of solutions to stochastic diffusion equations,* Sibirsk Mat. Z. **2** **No.1** (1961), 129-137.
[31] Skorohod,A.V., "Studies in the Theory of Random Processes," Addison-Wesley (the original Russian edition was published in 1961 by Kiev Univ. Press), 1965.
[32] Stratonovich, "Conditioned Markov Processes and their application to optimal control," R. Elsevier, New York, 1968.
[33] Stroock,D.W., and Varadhan,S.R.S., *Diffusion processes with continuous coefficients I and II,* Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 345-400 and 479-530.
[34] Stroock, D.W., and Varadhan,S.R.S., "Multidimensional Diffusion Processes," Springer-Verlag, Berlin New York, 1979.
[35] Yamada,T., and Watanabe,S., *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations,* J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 155-167.
[36] Yamada,T., *On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations,* ibid. **13** (1973), 497-512.
[37] Yor,M., *Introduction au calcul stochastique,* Séminaire Bourbaki, 34 ème année **590** (1981/82), 1-11.

第21章

経路空間の上の微積分

— 確率解析と Feynman の経路積分 —

池田信行

1. はじめに

経路空間上の解析は20世紀の夜明けとともに発展した数学の分野の一つである．その代表的な流れの一つは，1905年のA.EinsteinのBrown運動の研究に動機つけられた1908年のJ.Perrinの業績に源を持つものである．この流れは1923年のN.Wienerによる，Brown粒子の運動を記述する，経路空間上の確率の構成により大転機を迎え，数学としての姿が確立された．さらにA.N.KolmogorovやP.Lévyの確率過程の研究を経て，1942年の伊藤清による確率微分方程式の導入により次の大飛躍を遂げ今日の確率解析へと発展する．

もう一つの流れは，1924年のE.Schrödingerの波動力学，1925年のW.Heisenbergの行列力学など1920年代の半ばに生まれ，P.A.Diracにより発展させられた量子力学についてのR.F.Feynmanの研究に源をもつ．最初に姿を現すのは1942年にPrinceton大学に提出されたFeynmanの学位論文であり，今日Feynmanの経路積分と呼ばれている．この第二の方向は厳密な意味で，現代数学の形式の姿に完成しているとはいえないが，その考え方は経路空間の解析と呼ぶに値する豊かな内容を持っている．それのみならず，この二つの分野は，粗い言い方を許せば，しばしば同じ対象を二つの違った方向から見たものになっており，深い類似性で結ばれている．

数学の発展は多くの場合，内的で自己自律的に進むが，時には周辺分野，特に物理学と交流を深めながら進む([43])．かつてH.Poincarèは「科学の価値」([71])で

“物理学は我々に問題を解く機会を与えるばかりではない．解決の方法を見いだすのを助けてもくれるのである．……物理学は我々に解答を与えてくれ，また推論の方針を提案してくれるのである”

と述べているが，上の二つの流れの中に，この言葉の生きた姿を見ることが出来る．

ここでは，これらの流れの転機になった話を中心に，経路空間における微積分の考え方の発展の道筋とその影響の概略を，いくつかの典型的な例を通じて，紹介するのが目標である．なおこれから述べることと関連深い話が [30],[82] でまとめられている．

2. 離散の場合

当然のことながら，これらの考え方は今世紀になって突如現れたものではない．その萌芽は前世紀までの研究の中に色濃く現れている．ここではまず，離散集合の場合に典型的な二つの例をあげてその様子をみる．

例 1．酔歩　経路空間の解析の一つの源は古くから知られている酔歩 (random walk) の研究である．よく知られた銅貨投げのゲームは偶然性を持つ運動と考えられる．いま銅貨を投げて表が出れば上へ一歩進み，裏が出れば下へ一歩進むことにする．時刻 k での位置を $w(k), k=0,1,\cdots,n$ とすれば，これは表が出たら 1 円貰い，裏が出たら 1 円払う銅貨投げのゲームで k 回銅貨を投げたときの手持ち金を表す．ただし，$w(0)=0$ とする．今各時刻の間は両端の位置を直線でつないで得られる折線を $w(t), 0\le t\le n$ とする：すなわち，もし $k\le t\le k+1$ ならば

$$w(t)=w(k)+(t-k)(w(k+1)-w(k)),\qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

とおく．このような長さ n の折線の全体を W_n とおく．この W_n は n 回の銅貨投げであらわれる可能な結果の全体を表す．ここには事象の確からしさの度合を表すものとして，次の形で与えられる確率 P が考えられる：

$$P(A)={}^{\#}A/2^n,\qquad {}^{\#}A=\text{集合 } A \text{ の要素の総数}. \tag{2.1}$$

この確率は“長さ n の酔歩に対応する確率”と呼ばれる．例えばこの確率 P が付与された W_n の上の解析として次の計算が考えられる．$m(\le n)$ に対し $M(m)=\max\{w(t);0\le t\le m\}$ とおく．そのとき，$0<x\le m, x+m$：偶数 ならば

$$P[\{w\,|\,M(m)=x\}]=x\,m^{-1}{}_mC_{\frac{m+x}{2}}\,2^{-m}$$

となる．これを示すには集合 $\{w|\,M(m)=x\}$ の元の個数 ${}^{\#}\{w\,|\,M(m)=x\}$ を数えればよい．(2.1) より各 w は同じ大きさの確率の値を持つので，集合の要素を数えることはそれらの要素について確率の和をとることである．すなわち離散空間 W_n での“積分”を考えることである．ここで考えた $M(m)$ は，銅貨投げを固定した各時刻 k で見たものでなく，考える時間区間全体での軌跡 w を見て，その w の関数として得られる量である．

W_n での積分の計算をするのに役に立つ解析の方法に，次に述べる双対の考えがある： $w(t), 0 \le t \le m$ があるとき，W_n の要素 w^* で

$$w^*(0) = 0,\ w^*(1) = w(m) - w(m-1)\ ,\cdots,$$
$$w^*(i) = w(m) - w(m-i)\ ,\cdots,\ w^*(m) = w(m)$$

をみたすものを "w の双対な要素" と呼ぶ．例えばこの概念を用いると次のことがいえる：

いま $x > 0$ なる整数をとる．そのとき

"$w(1) > 0,\ w(2) > 0,\ \cdots,\ w(m) > 0,\ w(m) = x$ をみたす要素 w の数"

と

"$w(1) < w(m),\ w(2) < w(m),\ \cdots,\ w(m-1) < w(m),\ w(m) = x$
をみたす要素 w の数"

は等しい．さらに，この数は次に述べる原理を用いて数えられる．いま W_n の要素 w に対し

$$w^*(t) = w(t) + m, \qquad m : 整数$$

と表される軌跡の全体を W_n^* で表す．

鏡像原理 ：W_n^* の要素 $w(t), 0 \le t \le m$ で $w(0) > 0, w(m) > 0$ をみたし，x 軸に接するかまたは交わるものの数は W_n^* の要素 w^* で $w^*(0) = -w(0), w^*(m) = w(m)$ をみたすものの数に等しい．

この鏡像原理は熱伝導の理論における Kelvin 卿の鏡像原理の離散版である．鏡像原理は，数学でも半空間上の熱伝導の方程式の基本解の構成や境界を持つ Riemann 多様体の symetric double の構成などに広く用いられている．

ここに述べたように銅貨投げを経路空間を用いてとらえると，その上の "和" すなわち "積分" が確率の値の計算になる．それを求めるための有効な概念や規則については，17 世紀から 18 世紀にかけての A.de Moivre や P.S.Laplace の時代から研究されている．なおこのような種々の組み合わせの数を経路空間 W_n の計算規則から導く方法については有名な W.Feller の著書 [17] に詳しく述られている．

離散の場合にもう一つ例を述べよう．これは時代的には 1960 年代になってから考えられたものであるが，ここでの考え方は近年発達した数学の概念なしに理解できるもので，しかもこれからの話の内容の背景を知るために有益な例である．

例 2. 離散型の太鼓の問題 ([18],[41])．　正方格子の上に格子点の有限集合 Ω を考える．Ω の各格子点は少なくとも一つの bond で Ω の他の格子点とつながって

いることを仮定する．Ω の格子点で 4 本の bond で Ω の他の格子点とつながっているものを Ω の内点と呼び，番号 $1,2,\cdots,N$ をつける．Ω の点で内点でないものを境界点と呼び，番号 $N+1,N+2,\cdots,N+N'$ をつける．境界 bond の数を B とする．いま Ω の "shap matrix" T を

$$T=(T_{i,j}),\quad T_{i,j}=1\quad \text{もし，} i,j \text{ がたがいに近傍の内点；} =0\quad \text{他の場合，}$$

で定める．行列 T の固有値を $\mu_n\,(n=1,2,\cdots,N)$ とすれば，それから Ω の形，例えば内点の個数，境界の長さ，穴の数などを知る事ができる．このことを示すのには次の関係が基本になる：

$$M_s=\sum_{n=1,2,\cdots,N}\mu_n^s,\qquad s=1,2,\cdots,\quad (\text{母関数})$$

とおけば

$$M_s=\text{出発してから } s \text{ 歩で出発点に帰り，その間に境界に到達しない道の数，}\quad s=1,2,\cdots$$

となる．ここで道とは一歩で隣接の格子点に動き，かつそれ以外の点には動けない離散時間の軌跡をいう．ここでも，ある条件をみたす経路の数を数えるので，酔歩の場合と同様に，経路空間の上の積分を計算すると考えることができる．

3. Brown 運動 — Brown から Einstein を経て Perrin へ —

異色の物理学者寺田寅彦のエッセイ「ルクレチウスと科学」[1)]([79]) はローマの詩人哲学者ルクレチウス (紀元前98 -54) が暗室にさし入る日光の中に舞踊する微塵の混乱状態を例にして無秩序運動を説明した詩があることを紹介している．実際その原文も大学の中央図書館などに行けば見ることが出来る．このように空中や水中の微粒子のジグザグな動きは古くから注目を惹いていたが，現在言われている意味での科学の対象として浮かび上がって来たのは Irish の植物学者 Robert Brown の 1828 年の Philosophical Magazine and Annals of Philosophy,(New Series), September 1828 ([5]) に掲載された

> A brief account of microscopical observations made in the Months of June, July, and August, 1827 $\cdots$

と題する論文によるところが大きい．米沢富美子「Brown 運動」([90]) によればこの内容は当時の慣習に従ってパンフレットのような形で友人たちに配布された

1) 寺田寅彦は熊本に縁が深いが，筆者はルレチュウスの原本については熊本大学を訪ねた折に，同大学の櫃田倍之氏に教示を受けた．

が，この雑誌の編集者の要請で再録されたらしい．彼はこの中で花粉に含まれる微粒子をはじめ無機物など，どんな微粒子でも水中できわめてジグザグな動きをすることを確かめたことを報告している．その動きを一方向だけ見れば 2 節の例 1 で述べた，時間区間の分割を極端に狭めた場合の，酔歩の動きと似ている．

ここでの Brown の貢献でとくに大きい点は，微粒子の性質に関係なく，それが有機物であれ無機物であれ，非常に微細であれば常に同じ現象が見られることを確認したことである．実際は，1 ミクロン ($\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$) 程度の大きさの微粒子がそのような動きをすることが知られている．

話は横道にそれるが，実は非常に多くの文献や本に，花粉そのものがこのような動きをするかのように書かれている．Brown が述べているのは花粉ではなく，花粉を水中に浮かべたとき花粉の膜が破れて中から出てくる微粒子の動きである．花粉は 30 ミクロン程度の大きさのものがあり，このような動きをするには大きすぎる．この誤解は [1] に詳しく紹介されているように岩波洋造 [2] により指摘されている．話が次々に転載されるにつれて起きたようで我が国では，高名な物理学者もこめて，きわめて多くの人 (私もその一人である) が誤解を引き起こす紛らわしい文章を書いているが，それは日本にとどまらず，外国でも似たようなことが起きている．

Brown の研究の後にも，この運動のことは折にふれて研究の対象になっていたようであるが，この話を物理学の前面に引き戻したのは，今世紀の夜明けともいうべき 1905 年の Einstein の労作 [16] である．今から考えると信じ難いことであるが，19 世紀後半における L.Boltzmann たちの努力にもかかわらず，W.Ostwald や E.Mach など実証主義者たちの反対で，当時原子の存在は物理学者の中で不動のものになっていなかった．1905 年は Einstein が 26 歳のときで，彼はこの年光量子論，特殊相対論，Brown 運動の理論の 3 方面で画期的な業績を挙げるが，最後の Brown 運動についての研究は彼自身が自伝 ([15]) で述べているように，原子の存在を確実にするのが目的であった．米沢 [90] に詳しく紹介されているように Einstein は溶液の理論から浸透圧の公式を借用し，流体力学の理論からストークスの式とフィック法則を借用して，力学的描像から拡散係数を導き，一方偶然的な運動として拡散係数を統計的に求めて，両者についての等式を導いた．この中で，彼はそれまでの Brown 粒子についての研究を知らず，少なくとも意識せず，原子論によると懸濁し微視的粒子の運動は観測にかかるはずであることを発見した ([16] 参照)．この中で彼は運動の法則を記述するために熱方程式を導くが，これは 2 節の例 1 に述べた，Laplace の時代から盛んに研究されている酔歩についての中心極限定理と本質的に同じことを論じたことになる．このようにして，ゲーム的要素が強い銅貨投げの問題と水の分子が短時間に限りなく多い回数，あらゆる方向から微粒子に衝突しているためにおこる，偶然的な運動の問題とが一つのものとして

つながる.

このような Brown 運動の物理的研究から数学の新たな分野が生まれるには，もう一段階の飛躍を待たねばならなかった．それは 1908 年の Perrin の研究によってもたらされる．彼は Einstein が理論的に導いた結論を周到な準備の下になされた実験で実証し，原子の存在を不動のものにした．これらは 1926 年のノーベル賞の受賞につながるが，その成果は 1913 年に出版された彼の著書 [70] に詳しく紹介されている．それ以来 Brown 運動の説明にはこの本にある，3 個の半径 0.53 μm の乳香粒子を 30 秒毎に観測し，粒子の位置を順に直線で結んだものが引用されることが慣例みたいになっている ([70] の英訳版 p.115 参照)．数学の視点からみて特筆すべきは彼がこれらの観測から次のような結論に到達したことである ([70] の英訳版 p.110) :

> 「$\cdots$ It is imposible to fix a tangent, even approximately, at any point on a trajecttory, and we are thus remainded of the continuous underived functions of the mathematicians. $\cdots$」

彼は Brown 運動の軌跡が詳しく見れば見るほど複雑な動きをしており，どの点においても接線を持たず，微分不可能な曲線であることを認識しその重要性を指摘している．なお Perrin は早くからこのような曲線を用いた数学が出来るならば，不規則な連続体に関連する数学は真価を発揮するかも知れないと考えていたことが B.B.Mandelbroit [54] (2 章, p.6) に紹介されている．

4. Wiener 測度 — 数学的 Brown 運動 —

1 世紀にわたるこれらの数理科学的研究から数学への扉の鍵を開く役まわりを演ずるのは 29 歳の Wiener である．1923 年の論文 [83] で，今日 Wiener 測度と呼ばれている確率を連続関数の空間に導入することに成功し，それが Brown 運動の数学模型としての適切であり，その測度で測って 0 の集合があって，それを除いたところでは各経路が Perrin の主張する性質，すなわち

> 「各点で微分不可能で接線を持たず，任意の時間区間における曲線としての長さが無限大になる」

ことを示した．彼の自伝 [86] によれば Perrin の本 [70] に強い影響を受け，その内容を数学として実現することを目標として，無秩序の中の法則を記述するものとして “平均”，“統計” の概念に思いいたり，Gibbs の統計力学にたどりつく．それらを数学として表現する手段として，H.Lebesgue の積分論に到達する．C.Carathéodry や F.Hausdorff などの仕事を経て 1902 年に 23 歳の青年 Lebesgue は「Intégrale, Longueur, Aire」と題する学位論文 [50] を著し今世紀の数学の曙を告げた．この

理論も 1910 年代には洗練された形になりつつあり，すくなくともヨーロッパでは知る人も多くなっていたが，Wiener は，Lebesgue の理論の意味も役割も当時としては最もよく理解していたであろう．G.H.Hardy にこの理論を習ったと彼自身が述べている．彼の言葉に従えば Wiener 測度は Gibbs の物理的な考えと Lebesgue の積分の最初の出合の産物である．このように研究の対象も方法も今世紀の夜明けとともに生まれたものが Wiener により大輪の花として開花させられる．

Wiener 測度を彼自身の最初の方法で述べることは容易でないので，ここでは現代風にして紹介することにして，その準備から始める．よく知られているように，拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \qquad \text{on } (0, \infty) \times R^d$$

の基本解は

$$g(t, x, y) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{2t}\right]$$

で与えられる．Einstein が示したように x から出発した Brown 粒子が時刻 t のとき dy にいる割合は $g(t, x, y)\,dy$ で与えられる．

R^d の値をとる連続関数 $w : [0, \infty) \to R^d$ で $w(0) = 0$ をみたすもの全体がつくる空間を W^d で表す．任意の $w_1, w_2 \in W^d$ に対し

$$\rho(w_1, w_2) = \sum_{n=1,2,\cdots} 2^{-n}\left[\max_{0\le t\le n} |\, w_1(t) - w_2(t)\,| \wedge 1\right]$$

とおけば $\rho(w_1, w_2)$ は w_1 と w_2 の間の距離を定める．完備可分な距離空間 (W^d, ρ) における Borel 集合全体の作る σ-加法族，すなわち位相的 σ-加法族を F で与える．さらに任意の列：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し写像

$$\pi(t_1, t_2, \cdots, t_n) : W^d \ni w \longrightarrow (w(t_1), w(t_2), \cdots, w(t_n)) \in R^{nd}$$

を考える．可測空間 (W^d, F) の上の確率 P で次の条件をみたすものを "d-次元 Wiener 測度" と呼ぶ：任意の列：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ と任意の Borel 集合 $B \in B(R^{nd})$ に対し

$$\begin{aligned} &P(\pi(t_1, t_2, \cdots, t_n)^{-1}(B)) \\ &\quad = \int_B g(t_1, 0, x_1) g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで $B(R^{nd})$ は R^{nd} の Borel 集合全体のつくる位相的 σ-加法族である．(4.1) 式の関係が成立することを前提にすることは，古くからの銅貨投げの研究や Einstein の仕事および Perrin の実験結果から，Brown 運動はある時刻 t での位置がわかる

と将来の位置がどこにいるかの割合を決める法則は過去の履歴に関係なく，あたかもその点から新たに出発したのと同じであることが知られていたので自然なことである．この性質は離散時間の場合に A.A.Markov により一般的に研究されたことにちなんで，A.Ya.Hinchin の提唱に従って，Markov 性と呼ばれている．このような性質を持つものについては 6 節であらためてふれるが，今の場合はさらに $g(t, x, y)$ が x と y については距離 $|x-y|$ のみの関数になっていることから空間的に一様になっている．問題は

"(4.1) をみたす (W^d, F) の上の確率 P が存在するか？"

である．列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を任意に固定し (4.1) の右辺を $P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(B)$ とおけば

$$P_{t_1,t_2,\cdots,t_n} : B(R^{nd}) \ni B \longrightarrow P_{t_1,2,\cdots,t_n}(B) \in R$$

により $(R^{nd}, B(R^{nd}))$ の上の確率 $P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ が得られる．この確率に関することは有限次元の通常の解析の問題として解決される．いま点列：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ の取り方をすべて考えると確率の族 $\{P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}\}$ が得られる．さらに列：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ とその細分：$0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ $(n \leq m)$ があり，$t_i = s_{k(i)}, i = 1, 2, \cdots, n$ とする．そのとき写像 π を

$$\pi : R^{md} \ni (x_1, x_2, \cdots, x_m) \longrightarrow (x_{k(1)}, x_{k(2)}, \cdots, x_{k(n)}) \in R^{nd}$$

で定めると，任意の $B \in B(R^{nd})$ に対し

$$P_{s_1,s_2,\cdots,s_m}(\pi^{-1}(B)) = P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(B) \tag{4.2}$$

が成立している．このことは，任意の $t, s > 0$ と任意の $x, y \in R^d$ に対し

$$g(t+s, x, y) = \int_{R^{nd}} g(t, x, z) g(s, z, y)\, dz$$

が成立することから導かれる．さきに述べた問題を言い換えると

"(4.2) の性質をみたす確率の族 $\{P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}\}$ が与えられたとき，
(W^d, F) の上の確率 P で (4.1) をみたすものが存在するか？"

となる．これに答えるためには，時代的には順序が逆転するが，1950 年代に Yu.V. Prohorov [73] により定式化された用語によれば，確率の族 $\{P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}\}$ が緊密 (tight) の条件をみたすことを示せばよい．すなわち任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し W^d のコンパクト集合 K が存在し，任意の点列：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し

$$P_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\pi(t_1, t_2, \cdots, t_n)(K)) > 1 - \varepsilon$$

が成立することを示せばよい．

ここに述べたものと表現は違うが実質的にこれに相当することを Wiener は示したことになる．ここで重要なことは，もし目的の確率が存在するとすれば，それが W^d の上にまんべんなくのっているのでなく，きわめて不規則に変化する連続関数，いまの場合は 1/2 の巾の Hölder 連続な関数に近いような振る舞いをする関数の周りに集中していることを示すことである．Perrin が実験から学んで [70] に述べていることは，まさに Brown 運動の軌跡についてのこの性質であり，Wiener はそれに強い影響を受けた．その意味でこれらの主張は，点列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を固定したときに，時刻の列 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ における Brown 粒子が集合 B に含まれる割合が (4.1) の右辺で与えられるという主張とは質的に違うものである．かつこの認識は Wiener 測度が付与された経路空間の解析の性格を特徴つけるものになっている．この性質は，関数 $g(t, x, y)$ が任意の $c > 0$ に対し

$$g(ct,\, c^{\frac{1}{2}}x,\, c^{\frac{1}{2}}y)\, c^{\frac{1}{2}} = g(t,\, x,\, y) \quad t > 0, \quad x,\, y \in R^d \tag{4.3}$$

をみたすことに密接に関連している．より直接的には一次元のときに

$$\int_R (x-y)^{2n} g(t,\, x,\, y)\, dy = 1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1)t^n, \qquad n = 1,\, 2,\, \cdots \tag{4.4}$$

が成立することを用いて示すことが出来る．さらに (4.1) と (4.3) を併せると次のことが示される：任意の $c > 0$ に対し写像 ϕ_c を

$$\phi_c \,:\, W^d \ni w \longrightarrow \phi_c(w) \in W^d, \qquad \phi_c(w)(t) = c^{\frac{1}{2}} w\left(\frac{t}{c}\right), \qquad t > 0$$

で定めると Wiener 測度は ϕ_c に関して不変である．すなわち

$$P(B) = P(\phi_c(B)), \qquad B \in F$$

が成立する．この性質は Brown 運動，または Wiener 測度の "時空不変性" と呼ばれ，Mandelbroit が Brown 運動をフラクタルの典型的な例として挙げるときに基礎になる性質である ([54] 参照).

近年，数学では Brown 運動というときは次の形で与えられる確率過程を意味することが多い．確率空間 $(\Omega,\, B,\, P^*)$ 上に可測な写像 $X \,:\, \Omega \ni \omega \to X(\omega) \in W^d$ があり，連続な確率過程 $X(t,\, \omega),\, 0 \le t < \infty$ を

$$X(t,\, \omega) = X(\omega)(t), \qquad 0 \le t < \infty$$

で定めたとき X の確率分布 P^X，すなわち

$$P^X(B) = P^*(X^{-1}(B)), \qquad B \in F$$

が d - 次元 Wiener 測度 P に等しいとき，確率過程 $X(t, \omega), 0 \leq t < \infty$ を "d - 次元 Brown 運動" と呼ぶ．また W^d と Wiener 測度 P の組 $\{W^d, P\}$ を "d - 次元 Wiener 空間" と呼ぶ．

これまで運動の時間空間は $[0, \infty)$ にとってきたが有限区間の場合もこれまでの話はほとんど変更なしに成立するので，記号も用語もそのままで用いるのが慣例で，それでも混乱を起こすことは少ないので，ここでもそれに従う．

Wiener の理論のように，非常に不規則な関数が数学の対象として，理論の中で鍵になる役割を持って登場することについては，Perrin とは逆に著名な数学者の中には強い反感みたいなものを持つ人が少なからずいたようで，そのことについては [46], [54] に詳しく紹介されている．例えば C.Hermite は 1893 年 5 月 20 日付けの T.Stieltjes 宛の書簡で

「導関数を持たない関数と言う，この災厄から恐怖と戦慄で顔を背けたくなる」

と述べている ([54]. p.35 参照)．Poincaré もまた「科学と方法」で

「... 新しい関数 ... 人はただ先陣の推理の誤りを探しだすためにつくり出す ...」

と述べているように肯定的ではなかったようである．なおこのような事情については [46] に紹介されているように，形式に走るような極端な行きすぎた動きもあったようである．しかしながら，なにはともあれ，時代と若者は偉大な先達を乗り越えて自然の姿を解き明かし，新しい歴史の扉を開き続ける．我々はこのことの典型的な例を Brown 運動の研究の歴史の中に見いだすことが出来る．

この時代に Wiener 測度に近づいていた人は他にもあったようで，その代表的な一人が Wiener より 8 歳年長の Lévy である．彼の仕事が関係深いことは Wiener の論文の序文にも注意されている．Lévy は自伝 [50](p.95) で

「一次元 Brown 運動の関数 ... 実際， N.Wiener が 1923 年の論文ではじめてその厳密な定義をあたえたが，......．しかし，彼以前に先駆者，特にフランス人の Louis Bachelier や大物理学者 Albert Einstein ...　...... 私が掴むことができなかった機会のなかでも，この関数 $X(t)$ の発見を Wiener に譲ったことは，......，最も後悔の念を残していることの一つである．......」

と述べている．この前後の文章は，独特の研究姿勢を持ち，輝かしき業績を挙げた Lévy にしては驚くほどの無念さの表しようである．彼はさらに同じ本の p.98 で

「...... 私の「関数解析」の原稿をまとめていたが，そのなかで無限次元の空間で "真の平均" すなわち "真の測度" を定義することのむずかしさを指摘

していた. …… 次元の小さい体積についてはそのむずかしさがなくなることを注意した. …… Lipshitz の条件を満足する関数の体積を例に挙げよう ……. 私は Wiener が 1923 年に発見することになっていた事実のすぐ近くをそうとは知らずに通っていたわけである. ……」

と続けている. ここで上の「関数解析」とあるのは文献表の [51] である. この自伝 (p.83) には [83] が発表される前年の 1922 年の夏に Wiener が彼を訪ねたときの話として

「…… 私は彼がやりたがっていたことをやってしまっていたからである. ……」

の一文もある. なにはともあれ, Wiener の仕事の重要性を深く理解していた Lévy はその後 Brown 運動の研究に最も深くかかわった人である. なかでも Brown 運動の軌跡の不規則さの度合を反映する性質を広く, 深く追及した. それの成果の一端は文献 [52] をはじめ, 彼のその後の一連の業績の中に見ることが出来る.

Lévy の文章の中にでてくる Bachelier も Brown 運動の話をするときに忘れることの出来ない一人である. 彼は Poincaré の弟子であるが, 早くも 1900 年に 66 ページにおよぶ論文 [3] を発表し, 1 節で述べた酔歩の, 適当に正規化された系列が決める測度の, 理想化された極限に対応する確率過程を考え, 例えば軌跡のある時間区間における最大値の分布や先に述べた Kelvin の反射原理などに相当するものを論じている. ここでは連続時間経数をもつ確率過程としての Brown 運動の性質の解明が他に先駆けてなされている. ただ彼の推論は完全でなく, 欠陥を含むものである. その意味では過渡的な段階の研究であり, 彼が数学としての Brown 運動の創始者であるとは言い難いが, 理論が発展した現在の立場で見れば, まことに興味深い内容を含んでいる. この論文のもう一つの特徴は, 株価など経済現象の模型として Brown 運動を提案していることである. 近年数理フィナンスの研究が急速に発展しているが, その意味でも彼は先駆者であり, 今日ではその方面でよく知られている ([9], [46] 参照).

彼はその後も自分の流儀で論文を書き続けるが, その書き方の流儀のために理解されず, 恵まれない研究生活を過ごした. その様子は Mandelbroit [54] に詳しく紹介されている. 例えば Lévy は Bachelier の 1900 年の論文を見たようであるが, 最初の方の間違いのひどさに驚き, それきりになり, Kolmogorov の 1931 年の有名な論文 [44] に引用されているのを見て, 初めてその重要性に気がついたと, 自伝 ([50]) に述べている. なお Bachelier の業績, 境遇については [46], [54] に詳しく紹介されている.

話を再び Wiener に戻すと, 彼の研究には生涯を通して Brown 運動がその根底にあったが, 1930 年代にはそれに関連する研究に特に深くかかわっている (例え

ば [84], [85], [69] など参照). 中でも若くして遭難事故で世を去った R.E.A.C.Paley との共著である [69] では，経路空間の解析に有力な研究手段を提供する，新たな Brown 運動の簡明な定義に成功している．その内容は Wiener の方法を発展させた K.Itô - M.Nisio [38] に従えば次の形になる．

いま $I=[0,\,1]$ 上の Lebesgue 測度を $m(dx)$ で与える． $m_k=m,\,k=0,\,1,\cdots$ とおく．μ を平均 0 の一次元標準 Gauss 分布とし，$\mu_k=\mu,\,k=0,\,1,\cdots$ とする．$m_k,\,k=0,\,1,\cdots$，および $\mu_k,\,k=0,\,1,\cdots$ の無限直積をそれぞれ $m^\infty,\,\mu^\infty$ で与える．そのとき写像の列

$$I \xrightarrow{\phi_1} I^\infty \xrightarrow{\phi_2} R^\infty \xrightarrow{\phi_3} W^1, \qquad \phi : I \to W^1, \qquad \phi=\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1 \tag{4.5}$$

を次の性質をみたすように構成できる：

$$m\circ\phi_1^{-1}=m^\infty, \quad m^\infty\circ\phi_2^{-1}=\mu^\infty, \quad \mu^\infty\circ\phi_3^{-1}=P \quad (\text{Wiener 測度})$$

ϕ_1 は区間 I の点の 2 進展開と対角線論法を用い構成できる ([34] 参照)．ϕ_2 は簡単な変数変換である．すなわち $\phi_2\circ\phi_1$ は確率空間 $\{[0,\,1],\,m\}$ の上での独立で平均 0，分散 1 の標準 Gauss 分布をもつ確率変数列の構成であり，確率論では標準的な話である．したがって重要なのは ϕ_3 の構成である．任意の

$$x=(x_0,\,x_1,\,\cdots,\,x_n,\,\cdots)\in R^\infty$$

に対し

$$X_k(x)=x_{2k}, \quad Y_k(x)=x_{2k+1}, \quad k=0,\,1,\cdots$$

$$\phi_3(x)(t)=tX_0(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=1,\,2,\cdots}\left\{\frac{X_k(x)(\cos 2\pi t-1)}{2\pi k}+\frac{Y_k(x)\sin 2\pi t}{2\pi k}\right\}, \quad t\in[0,\,1] \tag{4.6}$$

とおけば μ^∞ 測度 0 を除いたところで W^1 上で収束する．すなわち一様収束する．したがって $\phi_3(x)(t),\,t\in[0,\,1]$ は連続関数である．ただし今は W^1 の時間区間は $[0,\,1]$ としている．なお (4.6) の右辺で $t\in[0,\,1]$ を任意に固定した時の各点収束ならば当時の確率ではすでに知られていた結果から容易に導くことができる．

結論として通常の Lebesgue 測度 m が付与された $[0,\,1]$，すなわち確率空間 $\{[0,\,1],\,m\}$ の上に定義された写像 ϕ による像として Wiener 測度 P が得られる．(4.6) は "Brown 運動の Fourier 展開による構成" と呼ばれる．

逆に写像 ϕ_3 を用い，$\{W^1,\,P\}$ 上の解析を平均 0，分散 1 の標準 Gauss 空間の無限直積 $\{R^\infty,\,\mu^\infty\}$ 上に移して行うことが出来る．

なおこれら Fourier 展開の話は，Itô - Nisio [38] によれば，[0, 1] 上の完全正規直交系 $\{\phi_k\}$ があるとき，$\cos 2\pi t-1,\,\sin 2\pi t$ を $\int_0^1\phi_k(s)\,ds$ で置き換えても類似

の結論が得られることがわかる．Wiener 空間の解析でうまくことを運ぶには，この $\{\phi_k\}$ を適切に選ぶことが重要である．

5.　Feynman の経路積分

1920 年代に量子力学が生まれた直後から古典力学との関連が強く意識されていた．いま簡単のため時間的に一様な力学系で Lagrangian が $L(x, \dot{x})$ であるとする．

$$p_m = \partial L / \partial x, \qquad m = 1, 2, \cdots, d$$

とおけば Legendre 変換: $R^d \times R^d \ni (x, x) \to (x, p) \in R^d \times R^d$, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_d)$ により Hamilton 関数 $H(x, p)$ は

$$H(x, p) = \sum_{m=1,2,\cdots,d} p_m \dot{x}^m - L \qquad \dot{x} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \cdots, \dot{x}^d)$$

となり Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = H\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) u \qquad (\hbar \text{ は Plank 定数})$$

となる．この方程式の基本解として与えられるプロパゲータ $g(x, t; y)$ により量子力学的記述が出来る．1933 年の [11] で Dirac はプロパゲータは微小な時間区間では

$$g(x, t; y) \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x, t; y; \phi)\right] \tag{5.1}$$

のごとく振る舞うことを述べている．ここで ϕ は $\phi(0) = y$, $\phi(t) = x$ をみたす経路で

$$S(x, t; y; \phi) = \int_0^t L(\phi(s), \dot{\phi}(s))\, ds \qquad \dot{\phi}(s) = \frac{d\phi(s)}{ds} \qquad (\text{作用積分}).$$

それより早く 1928 年に Van Vleck [80] は Lagrangian が x と $\dot{x}$ の 2 次形式のときはプロパゲータ $g(x, t; y)$ は，もし $\phi(0) = y$, $\phi(t) = x$ をみたす古典軌道 ϕ_0 がただ一つならば

$$g(x, t; y) = (2i\pi\hbar)^{-\frac{d}{2}} (\det(D_{ij}))^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x, t; y; \phi_0)\right], \ (\text{Van Vleck の公式}) \tag{5.2}$$

と表されることを示している．ここで

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j}\right) S(x, t; y, \phi_0) \tag{5.3}$$

とする．行列 $D = (D_{ij})$，行列式 $\det D$ はそれぞれ，Van Vleck 行列，Van Vleck 行列式と呼ばれる．あわせて一般の Lagrangian の場合，$\hbar \to 0$ のときの準古典近似を考えると，時間依存の形に変形する必要はあるが，本質的には (5.2) の形の量がプロパゲータ $g(x, t; y)$ の主要な状態を記述していることも示されている．ここで注目すべきは (5.2) の右辺は古典力学的量で完全に述べられていることである．

古典軌道は作用積分の臨界点として特徴つけられる．いま区間 $[0, t]$ で区分的になめらかな曲線 (一般には絶対連続でその微分が 2 乗可積分と呼ばれるクラスまで広げて考えられる) の全体を Φ で与える．いま少し粗い言い方を許せば，ϕ_0 は $\psi(0) = 0, \psi(t) = 0$ をみたす任意の $\psi \in \Phi$ に対し $DS(t, x, y; \phi_0)(\psi) = 0$ となる点として決まる．ここで

$$DS(t, x, y; \phi)(\psi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S(t, x, y; \phi + \varepsilon\psi) - S(t, x, y; \phi)}{\varepsilon}.$$

さらに 18 世紀に J.Jacobi [39] は適当な条件の下に古典軌道の変分で得られる Jacobi 場は，古典軌道の始点 y または終点 x についての偏微分で求まる Jacobi 場から生成されることを示している．このことを用いると Van Vleck 行列は Jacobi 場で書き下せることがわかる．

物理の教科書的な本 (例えば [23], [75], [77]) を見ると，Lagrangian が 2 次形式のとき，例えば調和振動子や一様磁場のときにプロパゲータ $g(x, t; y)$ の具体的な表現が書いてあり，準古典近似の考えと併せて物理的な結論が導かれている．それらの場合には古典軌道や Jacobi 場がそれぞれ，それらを決める方程式を解いて容易に求めることが出来る．それらを (5.2) に代入すればそれらの求める表現が得られる．このように 18 世紀から 19 世紀にかけて完成の域に達した古典力学は変分という経路空間の解析を通して今世紀の量子力学の中に生き続けている．

Jacobi 場は Riemann 幾何との関連で今世紀になり Morse([61], [64] 参照) などにより精力的に研究され幾何学の研究に欠くことの出来ないものになっている．さらに，それはまた漸近理論との関連で偏微分方程式の理論でも大きな役割を担っている．それのみならず 1 節で述べた意味での経路空間の微積分の 2 つの流れの中にも，理論の柱として登場することがわかったが，とくに，後に述べる確率解析を Jacobi 場を介在させた視点から見れば，Riemann 幾何や偏微分方程式の漸近理論に現れる事実が経路空間の問題として捉えられる．

話は変わるが Feynman は 1940 年代の始めに，Heisenberg や Schrödinger と異なり，Lagrangian から出発し古典力学と関連がより明確になる形の量子化の方法をさがし求めていた．たまたま Princeton のナッソウ酒場でのパーテイで H.Jehle に上記の Dirac の論文を指摘され，今日の Feynman の経路積分の考えに到達する．その成果は 1942 年 A principle of least action in quantum mecahnics と題する学位論文 [20] として Princeton 大学に提出される．そのとき彼は 24 歳であ

るが，第 2 次大戦のため，彼は Los Alamos のグループに組み込まれ戦争の末期 Cornell 大学に動くまでそこでの仕事に追われる．彼の成果が論文 [21] の形で公表されるには 1947 年まで待たねばならなかった．彼の考えはプロパゲータ $g(x, t; y)$ は (5.1) の右辺の形の量を同じ割合ですべての経路に加えることにより書き下せるということである．例えば [21]. p.371 で彼自身が次のように述べている：

「⋯ The path contribute equally in magnitude, but the path of their contribution is the classical action (in unit of $\hbar$) ; i.e., the time integral of the Lagrangian taken along the path ⋯」

そのことは通常

$$g(x, t; y) = \int_{\phi(0)=y,\, \phi(t)=x} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(x, t; y; \phi)\right] D(d\phi) \tag{5.4}$$

と表記する．$D(d\phi)$ は "Feynman の一様測度" と呼ばれる．これらに現れる記号のもう少し具体的な意味は経路積分のどの本にも書いてある (例えば Feynman 自身の本 [23] 参照)．なおこれらの経路積分の背景については Feynman のノーベル賞講演記録 ([22]) に詳しいのでこれ以上触れないが，この考えが Wiener 測度の考えと類似のものを背景に持っていることは次のエピソードから理解できるであろう．Feynman の指導教官であった J.A.Wheeler から Feynman の仕事についての話を聞いた Einstein が

「⋯⋯ 私はまだ神がサイコロでかけをするとは信じられない ⋯⋯」

と答え，

「⋯⋯ だが私はまちがえてもよいという権利を得たかもしれない ⋯⋯」

と続けたと [88] (p.12) に述べてある．

(5.2) の公式を Feynman の経路積分に対するものとして導いたのは C.Morrette [63] (1951) である．また Van Hove もその学位論文の付録で同じことを論じている．それらを Morrette に聞いた C.Pauli の有名な講義録にもその形で論じられている．これらの事情については最近の Ph.Choquard - F.Steiner の総合報告 [10] に詳しい．Morrette はまた Van Vleck の行列を Jacobi 場の視点から詳しく論じている ([12])．

今日物理では (5.4) の右辺をいかにも通常の積分のごとく考え，有限次元のときの微分を変分にかえて有限次元の積分で表示された量についての漸近理論の基礎的方法である，漸近展開，停留位相の方法，鞍部点の方法，Laplace の方法，大偏差の理論などの類似が成立するものとして準古典近似の話が展開されている．また調和振動子や一様磁場の場合に Jacobi 場を用いる経路空間における変数変換で

作用積分を標準型になおし，その変換の Jacobian として Van Vleck 行列式を導くことも行われている (例えば [8] 参照).

Feynman の経路積分の定義からはじまり，いろいろの解析の手段まで，そこに現れる推論の形式は，現代数学の水準では不完全で，一般論としてはそのままでは数学の枠組みに収まるものではない．しかしながら，考え方は数学として経路空間の解析の枠組みを考えるときに示唆に富む内容を含んでいる．事実 Wiener 空間の解析では，いくつかの類似が数学として展開されており，豊かな成果を生んでいる (7,8 節参照)．この両者の間の類推を進めるときの鍵は，Lagrangian や作用積分がそれぞれ

$$L(x,\,\dot{x}) = \sum_{m=1,\,2,\,\cdots,d} \frac{(\dot{x}^m)^2}{2}, \quad S(x,\,t;\,y;\,\phi) = \int_0^t \sum_{m=1,\,2,\,\cdots,d} \frac{\dot{\phi}^m(s)^2\,ds}{2}$$

となる場合で，形式的に $\hbar = i$ (純虚数) としたときの Feynman の経路積分の類似として Wiener 測度を考えるところにある.

6. 確率積分，確率微分方程式

— Kolmogorv から伊藤へ —

Feynman が新たな量子化に苦悶していた頃，太平洋を隔てた日本では，彼より 3 歳年長の伊藤清が拡散過程の新たな構成方法に挑んでいた．その最初の成果として，くしくも Feynman の学位論文と同じ 1942 年に，経路空間の解析のもう一つの流れを大きく変える，

「Markoff 過程ヲ定メル微分方程式」

と題する論文 [31](和文) を全国紙上数学談話会誌に発表した．そのとき彼は 27 歳であり，内閣統計局に勤務していた.

話は横道にそれるが，大学とか研究所など以外に勤務している人が書いた論文で，これほど長期間にわたり注目されるものは，少なくとも近年になってからの日本では非常にまれではないかと思われる．なお全国紙上数学談話会誌は当時大阪大学の関係者が中心になり，謄写版刷りの形で出版されていたもので，当時全国の数学者の研究交流の数少ない場所を提供していたと伝えられている (図 1 参照)．当時の事情を知る人も少なくなりつつあるが，印刷の手段が乏しい時代を思うと，この出版に費やされた労苦とそれに携わった人々の意気込みがしのばれる．なお当時の大阪大学理学部の雰囲気については Wiener の自伝 [86] に興味深い逸話が書いてある.

話を元に戻すと，当時の日本は戦時体制下で，現在からは想像すら出来ないくらい悪い研究条件の下にあり，しかもヨーロッパやアメリカなどの研究の中心から

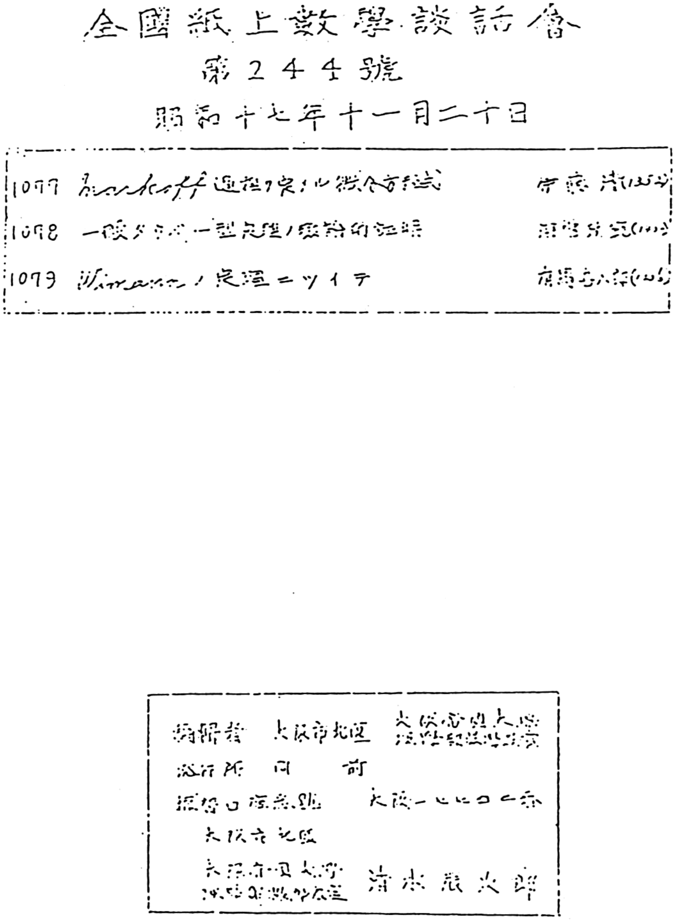

全國紙上數學談話會
第２４４號
昭和十七年十一月二十日
1077 Markoff過程ヲ定ムル微分方程式
1078
1079 ノ定理ニツイテ
編輯者 大阪市北區
發行所 同
大阪
清水辰次郎

図 1（a）

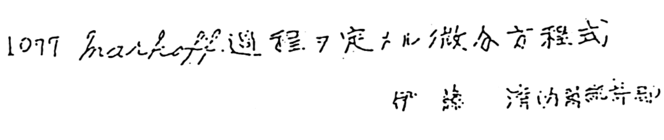

1077 Markoff過程ヲ定ムル微分方程式
伊藤
ハシガキ

図 1（b）

遠く離れ孤立していた．そのような状況で確率解析の新展開が始まることも，研究と環境の関係について示唆に富む例を提供しているように思える．Feynman がそうであったように，彼もまた戦争のために，この内容を英文で体系的に発表し，国際的に伝えるには Doob の支持で出版された 1951 年の [33] まで待たねばならなかった．

Wiener の論文 [83] が世に出てから 1940 年頃までに，数学としての確率論は大きく発展し，ここでの話に関係深いものとしては，1931 年の Kolmogorov [44] による拡散過程の一般的定式化，1933 年の同じ Kolmogorov ([45]) による確率論の公理系の確立，その枠組みでの Doob の確率過程の基礎に関する一連の研究，Lévy による加法過程の偶然性を表す基本的要素による表現に関する一連の研究など，が現れていた．ただその頃日本では，それらの研究に興味を示す人はごくまれで，多くの数学者には確率論は数学であるとすら考えられていなかったと伝えられている．このような環境の中で，伊藤はまず，Lévy の仕事を Kolmogorov や Doob のスタイルで研究し，今日加法過程の Lévy - Itô の表現と呼ばれているものを得ることに成功した．ここでは典型的な量で一般なものを表現する考えが根底に流れている．彼はそれと同じ考えにしたがい，次に Wiener 空間から拡散過程の経路空間への写像を定義し，その写像による Wiener 測度の像として拡散過程を決める測度を構成することを目指した．その成果が上に述べた論文 [31] である．彼はその写像を拡散粒子の運動方程式に相当する方程式の解を用いて構成しようとした．しかしながら，通常の運動方程式を考えたときに接線としての直線の役割を果たすのは，この場合は Brown 運動であるが，その軌跡は時間に関していたるところで微分不可能である．そのために方程式の意味から考え直す必要があり，そのことの解決のために彼は確率積分の概念に到達した．この概念が確率解析の次の段階の骨組みを考える鍵になる．

Kolmogorov [44] は連続な経路を持つ Markov 過程，すなわち拡散過程，の推移確率は，適当な条件の下で，絶対連続になり，その密度関数は次の形の拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,2,\cdots,d} a^{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{j=1,2,\cdots,d} b^j(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \tag{6.1}$$

の基本解で与えられることを示した．ここで (6.1) の右辺の微分作用素は (退化する場合も許して) 楕円型作用素である．[44] の序文などをみると Kolmogorov が拡散過程を Markov 性を持つ粒子の運動として考え，その偶然性を記述する経路空間の確率を議論の背景として描いていたことは事実と思えるが，論文の中で数学的事実として論じていることは，この段階では，あくまで推移確率の系に関係するものである．もちろんやや遅れて，(6.1) の係数が一定の条件をみたせば，今日 Kolmogorov の条件と呼ばれるものがみたされ，推移確率の系から連続な経路空間に，目的の確率が測度の拡張定理を用いて構成できることを論じている．この条件

は Brown 運動の場合は (4.4) から容易に導かれる．

伊藤の方法はより直接的で，最初に行列 $(a^{jk}(x))$ の分解

$$a^{jk}(x) = \sum_{m=1,2,\cdots,d} \sigma^j_m(x)\sigma^k_m(x), \qquad j,\, k = 1,\, 2,\, \cdots, d$$

により定まる行列 $\sigma(x) = (\sigma^j_k(x))$ を考える．次に Wiener 空間 $\{W^d,\, P\}$ の上で，与えられた $w = (w^1,\, w^2,\, \cdots, w^d) \in W^d$ に対し

$$dX^i(t) = \sum_{m=1,2,\cdots,d} \sigma^i_m(X(t))\, dw^m(t) + b^i(X(t))\, dt, \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots, d \tag{6.2}$$

を考える．解析の常道にしたがい，積分方程式の形に言い換えれば

$$X^i(t) - X^i(0) = \sum_{m=1,2,\cdots,d} \int_0^t \sigma^i_m(X(s))\, dw^m(s) + \int_0^t b^i(X(s))\, ds$$
$$i = 1,\, 2,\, \cdots, d \tag{6.3}$$

となる．粗い言い方を許せば，これが目的の運動方程式の候補になるが，まず問題になるのは

"(6.3) の右辺の第一項の意味"

である．先に述べたように Brown 運動の軌跡は滑らかでないので通常の積分とは考えられない．次にその定義は出来たとしてもそれが

"(6.1) に対応する拡散過程を決めるか？"

ということが問題になる．[31] においては伊藤は当時の確率論の成果を集大成し，(6.3) の右辺の第一項の積分をある意味で Riemann 和

$$\sum_{m=1,2,\cdots,d}\ \sum_{j=1,2,\cdots,[nt]} \sigma^i_m\left(X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\left\{w^m\left(\frac{j}{n}\right) - w^m\left(\frac{j-1}{n}\right)\right\} \tag{6.4}$$

の $n \to \infty$ のときの極限として確立することにより，第一の疑問は解消し，さらにその積分に関しては次の公式が成立することを用いて第二の疑問も同時に解消した：充分滑らかな任意の関数 $f : R^d \to R$ と (6.3) の解 $X(t,\, w)$ に対し

$$\begin{aligned} f(X(t,\, w)) - f(X(0,\, w)) = &\sum_{i,m=1,2,\cdots,d} \int_0^t f_i(X(s,\, w))\sigma^i_m(X(s,\, w))\, dw^m(s) \\ &+ \sum_{i=1,2,\cdots,d} \int_0^t f_i(X(s,\, w))b^i(X(s,\, w))\, ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2,\cdots,d} \int_0^t f_{i,j}(X(s,\, w))a^{ij}(X(s,\, w))\, ds. \end{aligned} \tag{6.5}$$

ここで

$$f_i(x) = \partial f(x)/\partial x^i, \qquad f_{i,j}(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, d.$$

いま W^{*d} を $w : [0, \infty) \ni t \to w(t) \in R^d$ で連続なものの全体とすれば，(6.3) の初期条件 $X(0) = x$ をみたす解を $X(t; x, w)$ で与えるとき，写像

$$X_x : W^d \ni w \to X_x(w) \in W^{*d} \qquad X_x(w)(t) = X(t; x, w) \qquad t \in [0, \infty) \tag{6.6}$$

による Wiener 測度 P の像 $P \circ X_x^{-1}$ を P_x とすれば W^{*d} の上の確率の族 $\{P_x ; x \in R^d\}$ が方程式 (6.1) に対応する拡散過程を決める．この方法の特徴は微分方程式など通常の解析の成果を使うことなく，直接経路空間から経路空間への写像を構成し，ある確率のその写像による像測度として新しい経路空間の確率を求めることである．その結果，考察すべき問題は最初に出発点として設定した経路空間の上の解析の形で捉えられる．

(6.4) の Riemann 和で被積分関数の値が分割の小区間の左端での値にとられていることや Brown 運動の性質から任意の番号 k に対し

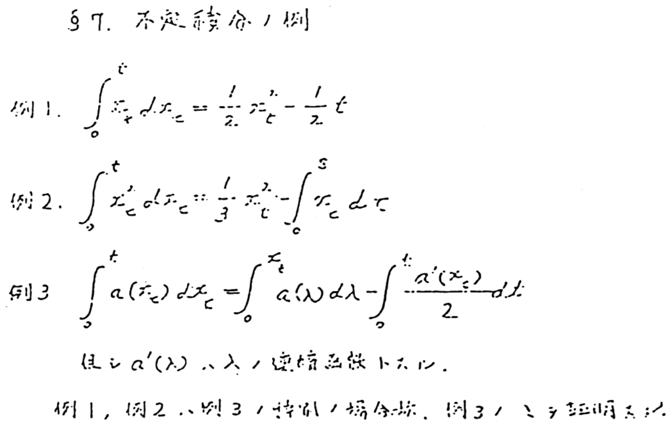
$$\sum_{m=1,2,\cdots,d} \sigma^i_m \left(X\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \left\{ w^m\left(\frac{k}{n}\right) - w^m\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}$$
$$\times \sum_{m=1,2,\cdots,d} \sigma^j_m \left(X\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \left\{ w^m\left(\frac{k}{n}\right) - w^m\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}$$

の $X\left(\frac{k-1}{n}, w\right) = x$ の条件の下での平均が $a^{ij}(x)\left(\frac{1}{n}\right)$ となる性質などが反映して (6.5) の左辺の関数 f を Taylor 展開したとき，極限をとっても第二項まで残ることになる．これが (6.5) の式で右辺の第二項が出てくる主な理由である．もし w が滑らかならばそのような項は残らない．今日では (6.4) の形の極限で得られる積分を “伊藤の確率積分” と呼ぶ．(6.5) は “伊藤の公式” と呼ばれるものの原型である．伊藤の公式から，$d = 1$ の場合に

$$w(t)^n = n\int_0^t w(s)^{n-1}\, dw(s) + \frac{1}{2}n(n-1)\int_0^t w(s)^{n-2}\, ds, \qquad n \geq 2$$

が得られる．[31] に $n = 2, 3$ の例が述べてある (図 2)，(また [32] 参照)．

伊藤がこの研究をしていた頃はすでに第二次世界大戦が始まり，まとまったものを英文で公表する手段もない状態であったので，この成果が国の内外で知られる機会は少なかった．伊藤より一歳若い丸山儀四郎は，その頃 Gauss 過程の Brown 運動による積分表示による研究を進めていたが，彼は伊藤のこの成果に，いちはやく興味を示した．彼は軍隊に召集されて夜間の門衛当番をしながら，この論文を学



§7. 不定積分ノ例

例1. $\int_0^t x_\tau dx_\tau = \frac{1}{2}x_t^2 - \frac{1}{2}t$

例2. $\int_0^t x_\tau^2 dx_\tau = \frac{1}{3}x_t^3 - \int_0^t x_\tau d\tau$

例3 $\int_0^t a(x_\tau)dx_\tau = \int_0^{x_t} a(\lambda)d\lambda - \int_0^t \frac{a'(x_\tau)}{2}d\tau$

但シ $a'(\lambda)$ ハ λ ノ連続函数トスル.

例1, 例2 ハ例3ノ特別ノ場合ナリ. 例3ノミヲ証明スベシ.

図 2

習したと伝えられている．これらの事情は伊藤 [37] の “Foreward” で知ることが出来る．1950 年前後になると伊藤は [31] 以外にも確率微分方程式に関係する論文をいくつか発表し，また丸山も関連する研究成果 ([57], [58] など) を出し始める．さらに 1953 年に出版された Doob の有名な確率過程の本 [13] では一定の条件をみたす martingale (そのクラスは Brown 運動を含む) に関する確率積分が導入され，拡散過程を確率微分方程式で取り扱う伊藤の成果が紹介される．また同じ 1953 年に国内でも伊藤自身による確率論の本格的な著書 [34] が出版され，Wiener 測度や確率微分方程式の理論が論じられる．このようにこの頃になると国の内外でこの理論を知ることが可能になるが，それでもなお，この方面の研究にかかわる人は伊藤，丸山，Doob などを除いてはごく希であった．H.P.McKean や A.V.Skorohod および一部の日本の若い研究者たちが研究の列に加わるのにはもう少し待たねばならなかった．このような事情の背景には当時 Markov 過程の一般的な理論が面目を一新しポテンシャル論的な研究が盛んに行われ，多くの研究者がその方面に力を注いだことがある．

しかし少しおくれて，応用，とくに確率制御との関係で確率微分方程式が注目される．また力学系の random perturbation のモデルとして確率微分方程式が用いられることも多くなる．これらの動きの中から注目すべき研究が現れる．その一つは (6.4) の被積分関数として

$$\sigma_m^i\left(\frac{X\left(\frac{j-1}{n}\right)+X\left(\frac{j}{n}\right)}{2}\right)$$

をとって極限を考えたときの確率積分である．これらは例えば D.L.Fisk [19]，L.Stratonovich [78]，S.Ogawa [68] などにより研究され，今日ではそれを使った研究を精力的に進めた Stratonovich の名前で呼ばれることが多い．または“対称確率積分”とも呼ぶ．伊藤 [36] は後に述べる martingale の枠組みによる確率積分を用い，伊藤の確率積分の言葉でそれらを整理したが，それにしたがって対称確率積分を $\circ dw(t)$ で表せば (6.5) は，一定の条件の下で

$$f(X(t,w)) - f(X(0,w)) = \sum_{i,m=1,2,\cdots,d} \int_0^t f_i(X(s,w))\sigma_m^i(X(s,w)) \circ dw^m(s) + \sum_{i=1,2,\cdots,d} \int_0^t f_i(X(s,w)) b^i(X(s,w))\, ds \qquad (6.7)$$

の形に書きかえられる．この式は形式的には，明らかに，$w(t)$ がなめらかなときと同じ形をしていて (6.5) の右辺の第 2 項はもはや現れない．

もう一つの動きは martingale の研究の進歩と Markov 過程論の整備に影響されたものである．前者としてはフランスの研究者たちによるもの (例えば P.Meyer [60] 参照) が特に顕著である．後者は Markov 過程の加法的汎関数に関連し本尾実・渡辺信三 ([66], [67]) などにより進められた．これらはいずれも Doob の考えを前進させるもので確率積分の理論の martingale 的構造に着目している．これらの流れは国田寛・渡辺信三 [47] として完成する．そこでは議論は完全に martingale の枠組みで進められ，伊藤の公式もその枠組みのものとして一般化されている．そのことにより確率積分の話は拡散過程の枠組みから一人立ちし，確率解析と呼ばれる分野の基礎的理論として完成し，その適用の範囲が飛躍的に増大する．現在この方面の話はほとんどのものが，本質的にはこの国田・渡辺 [47] で展開された枠組みにしたがって進められている (例えば [29] 参照).

拡散過程に話を戻すと，状態空間が R^d にとどまらず一般の多様体 M の場合には，正規直交枠の空間 $O(M)$ を用いて論ずることができる．このような取り扱いは 1970 年代の始め J.Eells - K.D.Elworthy たち (例えば [14] 参照) により始められたが，そもそもは 伊藤 [35] のテンソル場の平行移動の考えから出てきたものである．この考えは微分幾何と関連深く，事実 Eells は最初，この話を微分幾何のシンポジウムで話したと伝えられている．微分幾何学の rolling の話でよく知られているように，R^d 上の直線にそって多様体をすべらないように rolling すれば直線の跡として多様体の上に測地線が得られる．これに相当するものとして R^d 上の Brown 運動の軌跡の上を多様体を確率的に rolling して，その跡として得られる軌跡を $X(t,x,w)$, $t \in [0,\infty)$ とすれば，それから写像 $X_r : w \to X_r(w)$, $X_r(w)(t) = X(t;r,w)$, $t \in [0,\infty)$ が定まり，Wiener 測度の写像 X_r による像測度 $P \circ X_r^{-1}$ として拡散過程の測度系 $\{P_x ; x \in R^d\}$ が得られる．この像測度は $x = \pi(r)$ のみに依存する．ここで

$r \in O(M)$ は軌跡の初期値で $x = \pi(r)$, $\pi : O(M) \to M$ は自然な射影とする．この場合 rolling は，(6.7) を用いるために対称確率積分によって定義される．これらは微分幾何的な事実を確率解析的方法で調べるときに基礎になるものである．このような立場から確率微分方程式を取り扱う研究は，その後も K.D.Elworthy, P.Mallivin たちにより推進され，確率微分幾何と呼ばれるものに発展した．そもそも 1930 年頃から Kolmogorov は拡散過程が Riemann 幾何と密接に関連することを意識した結果を述べているが，それらを経路空間の上で全面的に展開する基盤が，このようにして確立されてくる．

7.　Cameron-Martin に始まる発展

— 変数変換，絶対連続性，Feynman-Kac の公式 —

時代を再びもとに戻して 1940 年代の中頃にかえると，伊藤の仕事よりややおくれてもう一つの重要な研究が始まり大きな転換が行われていることがわかる．Wiener と密接な交流を持っていた R.H.Cameron と W.T.Martin ([6], [7]) を中心に 1945 年前後から Wiener 空間における変数変換論の研究が精力的に始まる．二人の仕事は Wiener 測度が付与された経路空間を Brown 粒子の運動と関連づけることより，どちらかといえば，有限次元のときの R^d のように，測度が付与され積分が考えられる空間とみることに重きがある．この視点は Wiener の初期の仕事に現れる一つの側面である．彼らが Wiener にどのような影響を受けたかについては M.I.T.Press より出版された Wiener 選集 [87] に Martin が書いた Foreword に簡潔に述べられている．

W^d で Wiener 測度 P と写像 ϕ を考えたとき有限次元のときと違って ϕ による P の像測度 $P \circ \phi^{-1}$ が P と相互に絶対連続になるような ϕ は非常に限られる．逆にその制限のためにそのクラスはきわだった特徴を持つ．このような事情を明らかにする問題に最初に系統的に取り組んだのが彼ら 2 人である．その重要性は微積分には変数変換論は欠かせないものであるのでいうまでもない．

いま簡単のため時間区間は $[0,1]$ としておく．彼らの成果の一例として次の形の結果がある：写像を，$h \in W^d$ に対し

$$\phi(h) : W^d \ni w \longrightarrow w + h \in W^d \tag{7.1}$$

としたとき，それによる P の像測度 $P \circ \phi(h)^{-1}$ が P と同等になるための必要充分条件は h が次の空間 H に属することである：

$$H = \{\, h = (h^1, h^2, \cdots, h^d) \in W^d$$
$$;\ 各\ h^i\ は\ t\ に関して絶対連続で 2 乗可積分な derivative を持つ\,\}.$$

この結果は近年の確率解析で大きな役割を果たしている．H に内積

$$(h_1, h_2) = \int_0^1 \dot{h}_1(s)\dot{h}_2(s)\,ds, \qquad \dot{h}_i(s) = h_i(s) \text{ の derivative}, \quad i = 1, 2$$

を付与した空間を Cameron-Martin 空間と呼ぶ．ときには $h(0) = 0$ でない場合も同じ呼び名が用いられる．さらにそのときの密度関数は

$$\exp\left[\sum_{i=1,2,\cdots,d}\left\{\int_0^1 \dot{h}^i(s)dw^i(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{h}^i(s)|^2\,ds\right\}\right] \tag{7.2}$$

で与えられる．彼らはこの他にいろいろの変換の Jacobian を計算する仕事をこの頃行い，W^d 上の汎関数を Wiener 測度でみたときの確率分布の計算に応用している．特に 2 次形式の形をした汎関数の場合の結果は Feynman の経路積分に関する Van Vleck の公式に相当することを，Wiener 積分に関して考えることにつながっている．また Feynman の経路積分でも力学系の古典的な軌道 h に関し (7.1) の型の変換を考え，問題を始点と終点が同じ場合に帰着する議論が用いられる (例えば [23], p.60 参照)．この頃なされた Wiener 積分の計算と Feynman の経路積分に関するものとの類似性について論じた，いくつかの優れた総合報告がある (例えば [8], [24], [62])．

1940 年の前半頃まで Wiener の研究成果を理解し，自分の研究に活かすことが出来るようになることが日本でいかに困難であったかについての逸話は伊藤清，丸山儀四郎などの話として伝えられているが，そのことは日本だけのことではなかったようである．M.Kac はまだ Poland の Lwów にいた頃 S.Banach が Wiener の論文を読んでいるのをみて，自分も読もうとしたが理解するのがとても難しく，そのままになっていたが，40 年代の半ば過ぎに Martin との交流が生まれて，ようやく理解を深めたことを自伝 [42] (p.113 - 114) に述べている．その接触の中で Kac は自分の興味が Cameron-Martin の研究と関係深いことを理解していく．これらの研究では Srurm-Liouville 方程式が重要な役割を果たすことが明らかになり，それが有名な Feynman-Kac の公式につながっていく．

第 2 次世界大戦の終わり頃 Los Alamos から H.Bethe とともに Cornell 大学に移ってきた Feynman の話を物理教室の談話会で Kac が聞いたのは 1947 年の春である ([42], p.116)．そのときに，Lagrangian が

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{m=1,2,\cdots,d} \frac{(\dot{x}^m)^2}{2} + V(x)$$

の場合の Feynman 積分の結果から，拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - V(x)\,u, \qquad \Delta = \sum_{j=1,2,\cdots,d} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^j}$$

を論ずるための経路空間 W^d 上の測度は Wiener 測度に絶対連続でその密度関数が

$$\exp\left[-\int_0^1 V(w(s))\,ds\right]$$

であることに直ちに気がつき，数日にして，いわゆる Feynman - Kac の公式について話の道筋を作ったと [42], (p.116) に述べている．このときの気分の高揚は同じ本で次のように述べている ([42], p.116, ↓ 21 - ↓ 27) ことから想像される．

> 「$\cdots$ I find Feynman's formula to be very beautiful. It connects the qutum mechanical propagator, which is a twentieth centry concept, with the classical mechanics of Newton and Lagrange $\cdots$
>
> My own formula is more prosaic but it, too, spans two centries : the deffrential equation my formula solves is neinteenth century, while the Wiener integral is a creation of the twentieth $\cdots$」

これが Feynman - Kac の公式の原型であり，出発点であるが，今日では一般化され，偏微分方程式や微分幾何学または数理物理などの問題を経路空間の立場から取り扱うときに欠かせないものになっている．

Cameron-Martin から出発したもう一つの流れは Markov 過程の drift の変換と呼ばれるものである．1954 年の論文 [57] で丸山儀四郎は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \sum_{j=1,2,\cdots,d} b^j(x)\,\frac{\partial u}{\partial x^j},$$

に対応する経路空間の測度は Wiener 測度に絶対連続で時刻 t までの経路で生成される σ - 加法族に制限したときの密度関数は

$$\exp\left[\sum_{i=1,2,\cdots,d}\left\{\int_0^t b^i(w(s))\,dw^i(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |b^i(w(s))|^2\,ds\right\}\right] \tag{7.3}$$

と書けることを，$d=1$ の場合に，確率微分方程式の議論との関連で示した．(7.2) の右辺にも確率積分が現れるがその被積分関数 h が経路に無関係である．そのような積分は早くから Wiener たちにより考えられていた．一方丸山の (7.3) は伊藤の確率積分があってはじめて書けるものである．この公式はその後多くの人々により研究されており (25], [66] その他)，1960 年の I.V.Girsanov [25] にちなんだ名前で呼ばれることが多い．呼び名がそのようになった原因は，一つは私のように [57] の成果の意味を充分理解できなかった場合や発表された雑誌のために知らなかった場合とか，いくつかのことが重なって起きているようである．しかし最近は Maruyama-Girsanov formula の用語が定着しつつある．なおこのような drift の

変換は磁場のある場合の Schrödinger 方程式の考察などに不可欠である．なお最初の証明は違った形でなされたが，この成果と Feynman-Kac の公式とを併せた形のものを，伊藤の公式を用いて示すことができる．これまでのことを総合すると 2 階楕円型作用素で 1 階微分の項と定数項の処理が経路空間における測度の絶対連続の範囲内でできることになる．

経路空間の変数変換とその Jacobian の計算はこれら初期の仕事以後も，取り扱う問題の広がりとともに広範に行われ，現在も続いている (例えば [48], [74] など参照).

8. Malliavin 解析をめぐって

Feynman 積分に関連する話を除けば，これまで述べてきたことは経路空間における積分に関連することが中心であった．そのために Wiener 測度 P を考え，写像

$$F\,;W^d \ni w \longrightarrow F(w) \in M, \qquad M\ :\ \text{有限次元の Riemann 多様体} \tag{8.1}$$

があるとき F の確率分布，すなわち F による P の像測度 $P \circ F^{-1}$ が体積測度に関して

"密度関数を持つか？"　や　"その密度関数がなめらかであるか？"

の問題を系統的に論ずる，経路空間としての解析の手段は 1970 年代の半ばまでなかった．それまで，そのような問題は必要に応じ偏微分方程式論や Fourier 解析など有限次元の解析の手段を援用して解決されてきた．たとえば拡散方程式の解の積分表示はできても，なめらかな基本解の存在を直接取り扱う方法を持たなかった．すなわち hypoelliptic の問題を確率解析的方法だけで論ずることができなかった．

この種の問題を論ずるためには有限次元の場合と同様に，ある種の部分積分の公式を示すことが基本である．そのためには W^d 上の関数に対する変分の概念を実用に耐えれる形で確立することが重要である．ところが 60 年代から 70 年代にかけての研究で W^d の上の典型的な関数が W^d の位相に関して連続ですらないことが明らかにされていた ([89])．たとえば Lévy が 1940 年の [52] で導入した R^2 の上の Brown 運動の軌跡の囲む面積：

$$S(t,\,w) = \int_{w\,[0,t)} \alpha = \frac{1}{2}\int_0^t (w^1(s)\,dw^2(s) - w^2(s)\,dw^1(s)), \quad \text{(Lévyの確率面積)}$$

$$w[0,\,t] = \{w(s)\,;\,s \in [0,\,t]\}, \quad \alpha = \frac{x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1}{2} \tag{8.2}$$

はそのようなものの代表である．このことが反映して多次元の確率微分方程式の解は一般には W^d の位相に関して連続でない．このような事情のために，関数解

析の立場から考えられていた変分の考えを，上述の目的のために，そのままの形で使うことができない.

Malliavin は [55], [56] において確率微分方程式の解や確率積分を用いて定まる (8.1) の型の写像に応用することに目標を設定して，特定の方向だけの変分，今日確率変分と呼ばれているもの，を導入し，確率解析に新たな一つの転換点を築いた．彼はその概念をもとに

"なめらかな Wiener 汎関数"

のクラスを定義し，ある種の部分積分の公式を確立した．さらにその公式を示すための充分条件の一つとして，写像 F の非退化の条件を検証可能な形で与えた．また (8.2) の確率面積やなめらかな係数を持つ確率微分方程式の解として得られる写像が，ここに述べる意味ならば充分なめらかであることを示した．さらに確率微分方程式の解として得られる写像が非退化のための係数の条件を解明した．それらの結論として，この節のはじめに述べた問題に一つの解答が与えられる．これらが D.Stroock が Malliavin 解析と呼んだものの出発点であり，伊藤 [31] 以来の大きな影響を確率解析におよぼした理論の始まりである.

この成果は 1976 年京都大学数理解析研究所で開催された国際会議で最初にまとまった形で発表されたので日本の研究に大きな影響を与えた．特に渡辺信三，重川一郎，楠岡成雄などがその研究の流れの中で重要な役割を果たす ([76], [81]. など参照)．特に渡辺 ([81]) は Malliavin の成果を W^d の上の超関数論の形式に再構成し，次の発展につなげた．そのことにより拡散方程式の基本解の (一般化された) 積分表示を与えるとともに，そのパラメータについての漸近展開は被積分関数の漸近展開に帰着されることが示された．またこれらの進歩により，幾何や数理物理の問題で重要な "跡" を考えることを，確率解析の枠組みに取り入れることができた．これらについては渡辺自身によるまとまった紹介 [82] がある.

この Malliavin，渡辺の枠組みに基礎をおけば Feynman の経路積分で論じられていることのいくつかの類似を，Wiener 積分について考え，数学としての厳密さの水準を保って論じることができるようになる．たとえば Cameron-Martin, Kac, Lévy などにより論じられた 2 次の Wiener 汎関数の確率分布の問題は Feynman 積分についての Van Vleck の公式の類似を求める問題に相当することがわかる．簡単な例をあげると，Lévy の公式と呼ばれる磁場の項を持つ場合の Schrödinger 方程式の基本解が次の形の exact form を持つことが ([53])，この立場から求まる：

$$w_x(s) = w(s) + x, \quad w \in W^d, \quad x \in R^d,$$

$$S_x(t, w) = \int_{w_x[0,t)} \alpha, \quad w_x[0, t] = \{ w_x(s) \,;\, s \in [0, t] \}, \quad \alpha = \frac{x^1\, dx^2 - x^2\, dx^1}{2}$$

$$\int_{W^d} \exp[\, z S_x(t, w)\,] \delta_y(w_x(t)) P(dw)$$

$$= \frac{1}{2\pi t}\left\{\frac{zt}{2}\left(\sin\frac{zt}{2}\right)^{-1}\right\}$$

$$\times \exp\left[z(x^1y^2 - x^2y^1) - \left\{\frac{zt}{2}\left(\sin\frac{zt}{2}\right)^{-1}\right\}\cos\frac{zt}{2}\left(\frac{|x-y|^2}{2t}\right)\right] \tag{8.3}$$

この式の左辺は渡辺 [81] の意味の一般化された積分表示である．この式は Van Vleck の公式を Wiener 積分に対し示し，(一般化された) 古典軌道と Jacobi 場を計算することにより求まる．また Feynman の経路積分の場合と同様に，W^d の上の 2 次形式を Jacobi 場により標準化する方法も適用できる．これは Cameron-Martin の考えに近い．さらに $S_x(t, w)$ を決める Cameron-Martin 空間の上の対称な Hilbert-Schimit 作用素の固有関数による Brown 運動の Fourier 展開などで求めることもできる．これは Lévy が用いた方法である．彼はそれと古典的な公式を組み合わせて (8.3) を示した．

数学では同じものを違った方法で計算して重要な等式を得ることが多い．いまの場合も (一般化された) Wiener 積分をいくつかの方法で計算することは，古くから知られている等式を量子力学的量と古典力学量の等式として示すことになる．このことは，先に引用した Kac の見解と同じ話がここにも現れていることを示している．また Kac と同じ主張を示す一例として，物理では Feynman の経路積分を用い Selberg の跡公式が論じられているが ([26], [27])，同じ問題を上平面に実現した Poincarè 空間の Brown 運動を用いて数学的に厳密な推論の下で論ずることができる．この考察から Selberg の跡公式に古典力学的な量がでてくる事情が鮮明にされる．

話は変わるが，株価の問題，経済現象に関わる偶然変動は 1900 年に Bachelier により Brown 運動の模型を用い論じられたことはすでに述べた．ところが近年数理ファイナンスの問題が確率解析を用いてますます盛んに論じられるようになっている．そのために伊藤の公式は一部の経済学者や金融関係者にとっては，数学の大部分の人より，なじみの深いものになっている (たとえば [28] 参照)．その理論で最も典型的なモデルとして現れる Black-Scholes モデルでは幾何学的 Brown 運動と呼ばれる拡散過程が用いられるが，それらに関連する計算は Poincarè 平面の上の Brown 運動の確率解析的考察に深く関わっており，その議論は上の Selberg の跡公式を論ずる話と密接につながっている．

9. 結び

Feynman の経路積分を用いて，物理で行われている議論の中で，Wiener 積分によって，その類似を数学として論ずることができるものは，Malliavin 解析の進歩でしだいに増えてはいるが，まだまだ限られている．その意味で経路空間の解析

としてのまとまりにはほど遠いといわざるを得ない．もちろん，Feynman の経路積分については，ここで述べた意味での確率解析とは違った，いろいろの立場からの解明が考えられる．どの立場に立つとしても，経路空間における漸近理論に関連することは，Laplace の方法や大偏差の理論を除いて数学としては不満な点が多い．

結論として今世紀とともに産声をあげた経路空間上の微積分は，Wiener に始まりそのときそのときの若者がたゆまぬ挑戦を続けたにもかかわらず，世紀の終わりになっても，いくつかの単純な場合に議論の入り口に到達した感を得たにすぎず，全貌の姿などその影さえも見えないのが本当の現在の状態というべきかも知れない．

最後に恩師，諸先輩をこめてすべて敬称を省略したことを断りたい．

参考文献

[1] 青木国夫その他；『思い違いの科学史』朝日選書，の中の板倉聖宣 "水中で花粉は動く" pp. 242-259.

[2] 岩波洋造；『植物の Sex ⋯⋯ 知られざる性の世界』講談社ブルーバックス，1973.

[3] L.Bachelier ; Théorie de la speculation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 17 (1900), 21-86.

[4] J.S.Bisumut ; Large deviations and the Malliavin calculus, Birkhauser, 1984.

[5] R.Brown ; A brief accout of microsocopial observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and the general existence of active moleculues in organic and inorganic bodies, Philosophical Magagine, Ann. Philos. New Series, 4 (1928), 161-178.

[6] R.H.Cameron-M.Martin ; Transformations of Wiener integrals under traslations, Ann. Math. 45 (1944), 386-396.

[7] ⋯⋯⋯ ; The transformations of Wiener integrals by non-linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949), 253-283.

[8] R.Cenni, E.Galleani d'Agllano, F.Napoli, P.Saracco, M.Saassetti ; Feynman integrals in theoretical, nuclear and statistical physics, Monographs and Textbooks in Phys. Sci., Lect. Notes, Bibliopolies, 1989.

[9] P.H.Coother 編；The radom character of stock market prices, MIT, 1964.

[10] Ph. Choquard, F.Stiner ; The story of Van Vleck's and Morrette-Van Hove's determinant, preprint.

[11] P.A.Dirac ; The Lagrangian in quantum mechnics, Physikalische Zeitschirift der Sowjetunion, 3 (1933), 312-320.

[12] C.De Witt-Morrette, The semiclassical expansion, Ann. Phys., 97 (1976), 367-399.

[13] J.Doob ; Stochastic processes, Wiley, 1953.

[14] J.Eells-K.D.Elworthy ; Stochastic dynamical systems, Control theory and Topics in Functional Analysis, III, Intern. atomic energy agency, 1976, 179-185.

[15] A.Einstein-P.A.Schlipp 編，Philosopher-Scientist, (1959) ; 第一章，Einstein's Autobiography (『アインシュタイン自伝ノート』中村誠太郎，五十嵐正敬訳，東京図書，1978).

[16] A.Einstein ; On the movement of small particles suspended in a statonary liquid demanded by the molecular-keinetic theory of heat, Ann. Phys., 17 (1905), 549 - など R.Furth 編集の Investigations on the theory of the Brownian movement, (1968), Dover にあるもの．

[17] W.Feller ; 『確率論とその応用』上，下 (河田龍夫監訳)，紀伊国屋書店.
[18] M.E.Fisher ; On hearing the shap of a drum, J.Combinatorial Theory, 1 (1966), 105 - 125.
[19] D.L.Fisk ; Quasi-martingales and stochastic integrals, Technical Report 1, Dep. of Mathematics Michigan State University.
[20] R.Feynman ; A principle of least action in quantum mechanics, Princeton Uni. の学位論文，1942.
[21] ········· ; Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. 20 (1948), 321-341.
[22] ········· ; 『物理法則はいかにして発見されたか』(江沢洋訳)，ダイヤモンド社，1983.
[23] R.F.Feynman-A.R.Hibbs ; Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, 1965.
[24] I.M.Gelfand and A.M.Yagolom ; Integration in function spaces and its applications in quantum phycs, J.Math. Phy., 1 (1960), 48-69, (Uspekhi Math. Nauk, 11 (1956), 77-114 の英訳)
[25] I.V.Girsanov ; On the transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory Probab. Appl. 5 (1960), 285-301.
[26] C.Grosche ; Path integrals, hyperbolic spaces, and Selberg trace formula, Word Scientific, 1995.
[27] M.C.Gutwiller ; Chaos in classical and qutum mechanics, Springer-Verlag, 1990.
[28] J.Hull ; Options, Futures, and other Derivative Securities, Prentice-Hall, Inc., 1989 (ファイナンシャル　エンジニアリング，三菱銀行商品開発室訳，金融財政事情研究会).
[29] N.Ikeda-S.Watanabe ; Stochastic differential equations and diffusion proceses, Kodansya/North-Holland, Second ed., 1989.
[30] 池田信行；『確率解析の生い立ちと成長』数学，49 巻第 3 号 (1997)，272-291, 岩波.
[31] 伊藤清；『Markoff 過程ヲ定メル微分方程式』全国紙上数学談話会.
[32] K.Itô ; On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math J., 1 (1950), 32-35.
[33] K.Itô ; On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc., 49 (1951), 1-51.
[34] 伊藤清；『確率論』岩波，1953.
[35] K.Itô ; The Brownian motion and tensor fields on riemannian manifold, Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 1963, 536-539.
[36] K.Itô ; Stocastic differentials, App. Math. Opt., 1 (1975), 374-381.
[37] K.Itô ; Selected papers, Springer-Verlag, 1986.
[38] K.Itô-M.Nisio ; On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, Osaka J. Math. 5 (1968), 68-82.
[39] J.Jacobi;Zur Theorie Variatione-Rechnung und der Differntial-Gleichnunen, J. Reine Angew Math., 17 (1837), 68-82.
[40] M.Kac ; On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., 189-215, Univ. California Press, 1951.
[41] M.Kac ; Can one hear the shap of drum, Amer. Math., Monthly, 73 (1966), 37-49.
[42] M.Kac ; Enigmas of chance ; An autobiography, Harper & Row, 1974.
[43] M.Kac, G.C.Rota, J.T.Schwartz, Discrete thoughts, Essays on mathmatics, science and philosophy, Birkhauser, Boston, 1986 (『数学者の断想』竹内茂，池永輝之，西沢康夫，広田則夫訳，森北出版，1995).
[44] A.N.Kolmogorov ; Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrenung, Math. Ann., 104 (1931).

[45] ·········; Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrenung, Erg. d. Math., 1933 (『確率論の基礎概念』根本伸司，一条洋訳，東京図書).
[46] T.W.Korner ; Fourier analysis, Cambridge University Press (『フーリエ解析大全』高橋陽一郎訳，朝倉書店).
[47] H.Kunita-S.Watanabe ; On square integralable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209 - 245.
[48] S.Kusuoka ; The non-linear transformation of Gaussian measure on Banach spaces and its absolute continuity (1), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 29 (1974), 567-597.
[49] H.Lebegue ; Intégrae, Longuer, Aire, Ann. Math. Pure Appl., (3) 7 (1902), 231 - 359.
[50] ポール，レヴィ；『一確率論研究者の回想』飛田武幸，山本喜一訳，岩波，1973.
[51] P.Lévy ; Lecon d' analyse fonctionelle, Gauthier Villars, 1922.
[52] ·········; Le mouvement brwonien plan, Amer. J. Math., 62 (1940), 487-550.
[53] ·········; Wiener random function and other Laplacian random functions, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., II, 171-186, 1951.
[54] ベンワー，マンデルブロ；『フラクタル幾何学』広中平祐監訳，日経サイエンス，1985.
[55] P.Malliavin ; Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operator, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto, 1976, ed. by K.Itô, 195-263, Kinokuniya, 1978.
[56] ·········; C^k-hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. by A.Friedma and M.Pinsky, 199-214, 327-340, 1978.
[57] G.Maruyama ; On the transition on probability functions of the Markov process, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 5 (1954), 10-20.
[58] ·········; Continuous Markov proceeses and stochastic equations, Rend.Circ.Mat. Palermo, Ser., 2., 4 (1955), 48-90.
[59] ·········; Selected papers, Kaigai Publ., 1988.
[60] P.A.Meyer ; Intégrales stochastiques, I-IV, Sem. de Prob., Lec. Notes Math. Springer, 39 (1967), 72-162.
[61] J.Milnor ; Morse Theory, Ann. Math. Studies,(『モース理論』志賀浩二訳，吉岡書店，1968).
[62] E.W.Montroll ; Markov chains, Wiener integrals and quantum theory, Comm. Pure Appl. Math. 5 (1951), 848-852.
[63] C.Morrette ; On the definition and approximation of Feynman's path integral, Phys. Rev. 81 (1951), 848-852.
[64] J.Morse ; Variation Analysis, Jhon Wiley, 1973.
[65] M.Motoo ; Diffusion processes corresponding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, Ann. Inst. Statist. Math., 12 (1960), 37-61.
[66] 本尾実；マルコフ過程の Additive Functionals, Seminar on Probability, 15 (1963).
[67] M.Motoo-S.Watanabe ; On a class of additive functionals Markov process, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1964-65), 429-469.
[68] S.Ogawa ; On a Rieman definition of stochastic integral (I), (II), Proc. Japan Acad., 46 (1970), 153-157, 158-161.
[69] R.E.A.C.Paley - N.Wiener ; Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc., Coll. Publ., 1934.
[70] J.Perrin, Atomes, Ox Bow Press, 1990, これは Les Atomes, 1913 の英訳.
[71] H.Poincaré ; La valeur de la science, Flammarion, 1970 (『科学の価値』，吉田洋一訳，岩波文庫，1977).
[72] ·········;『科学と方法』吉田洋一訳，岩波文庫.

[73] Yu. V.Prohorov ; Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theor. Probab. Appl., 1 (1956), 157-214.
[74] R.Ramer, On non-linear transformations of Gaussian measures, J.Funct. Anal., 15 (1974), 166-187.
[75] 崎田文二，吉川圭三,『経路積分による多自由度の量子力学』岩波書店，1986.
[76] I.Shigekawa ; Derivative of Wiener functionals and absolutely continuity of induced measures, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 263-289.
[77] L.S.Shulman ; Techniques and applications of path integration, Jhon Wiley & Sons, 1981 (『ファインマン経路積分』高塚和夫訳，講談社，1995).
[78] R.L.Stratonovich ; Conditional Markov proceeses and their application to the theory of optimal control, Amer. Elsvier, 1968.
[79] 寺田寅彦；『ルレチウスと科学』全集.
[80] J.H.Van Vleck ; The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 14 (1928), 178-188.
[81] S.Watanabe ; Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Inst. Fundamental Research/springer, 1984.
[82] ········· ; Stochastic analysis on Wiener space, in Proc. of the Norbert Wiener centenary congress 1994, Proc. of Symp. in Appl. Math.,52 (1997), 359-370, Amer. Math. Soc.
[83] N.Wiener, Differential space, J. Math. Phy. 2 (1923), 131-174. par[84] ········· ; Generaized harmonic analysis, Acta Math., 55 (1930), 117-254.
[85] ········· ; The homogeneous chaos, Amer, J.Math., 60 (1938), 897-936.
[86] ········· ; I am a mathematician, MIT Press, 1964.
[87] ········· ; Selected papers, MIT Press, 1964.
[88] ジョン，ウイーラー；『若き日，さようならファインマンさん』丸善.
[89] E.Wong-M.Zakai ; On the relation between ordinary and stochastic differential equations, Intern. J.Engng. Sci., 3 (1963), 213-229.
[90] 米沢富美子；『ブラウン運動，物理学 One Point 27』 共立.

●編者・執筆者

足立恒雄——早稲田大学
池田信行——立命館大学
上野健爾——京都大学
小田忠雄——東北大学
笠原乾吉——津田塾大学
金子　晃——お茶の水女子大学
鹿野　健——山形大学
倉田令二朗——河合文化教育研究所
齋藤利弥——河合塾
齋藤正彦——湘南国際女子短期大学
佐武一郎——カリフォルニア大学・東北大学名誉教授
杉浦光夫——東京大学名誉教授
高瀬正仁——数学者・数学史家
高橋陽一郎——京都大学
飛田武幸——名城大学
堀田良之——岡山理科大学
松本幸夫——東京大学
三宅克哉——東京都立大学
宮野　悟——東京大学
山口昌哉——京都大学・龍谷大学名誉教授
山田俊雄——立命館大学
吉沢尚明——京都大学名誉教授

20世紀の数学

1998年9月30日　第1版第1刷発行
1998年10月20日　第1版第2刷発行

編者　笠原乾吉
　　　杉浦光夫
発行者　大石　進
発行所　株式会社日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話 (03)3987-8621［販売］
(03)3987-8597［編集］
印刷　壮光舎印刷株式会社
製本　松岳社
デザイン　海保　透

ISBN 4-535-78247-4